Basiswissen Mathematik

- Mathematik der Sekundarstufe I -

Natascha Scheibke

Essen, den 01. August 2016

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Offen im Denken

Einführung

„In Mathe war ich immer schlecht ...“ lautet der Titel eines Buches von Albrecht Beutelspacher. Nicht ohne jeden Stolz ist das auch eine beliebte Stammtischparole. In Mathe nicht gut zu sein, ist keine Schande, nein, vielmehr ist man damit anscheinend salonfähig.
Ganz anders bei Ihnen. Sie haben erkannt oder man hat es Ihnen dringend angeraten, dass Sie Ihre Mathematikkenntnisse auffrischen und vertiefen sollten. Auch wenn Sie sich in Zukunft *„nur“* einem naturwissenschaftlichen Studium widmen wollen. Es wird eventuell das ein oder andere mathematische Thema der Sekundarstufe I in Vergessenheit geraten sein. Oder, auch dass soll vorkommen, es ist Ihnen damals nicht ausreichend klar geworden. Oder, noch viel schlimmer, das Thema ist in keinster Weise angesprochen worden.
Jeden der obigen Punkte soll dieser Vorkurs abmildern. Er soll Sie dazu ermutigen, sich noch einmal mit den grundlegenden mathematischen Techniken vertraut zu machen, von denen wir einige häufig in unserem Alltag verwenden. Andere mathematische Fähigkeiten werden im Alltag nur gelegentlich benötigt oder werden uns von Maschinen (Computern, Taschenrechnern) abgenommen. Auch hier sollen Sie mit Hilfe dieses Kurses befähigt werden, die grundlegenden mathematischen Techniken auch ohne Hilfsmittel zu bearbeiten, einerseits um technikunabhängig zu sein, andererseits das Vertrauen in Ihr eigenes Können zu stärken. Des Weiteren sollen Sie die mathematische Fachsprache sicher beherrschen, damit Sie im wissenschaftlichen Umfeld auch adäquat agieren können.
Das Lösen von Aufgaben im allgemeinen und das exakte Aufschreiben von Lösungswegen bzw. Beweisen gehören zum Studium der Mathematik dazu. Machen Sie regen Gebrauch davon.
Bei Ihren nun kommenden Studien der Mathematik wünsche ich Ihnen aufregende und erhellende Zeiten.
Natascha Scheibke

Inhaltsverzeichnis

1 Arithmetik - Das Rechnen mit Zahlen **5**

1.1 Die natürlichen Zahlen - $\mathbb{N}$ . . . 5
1.2 Grundlegende mathematische Begriffe . . . 5
1.3 Elementare Rechengesetze auf den natürlichen Zahlen . . . 6
1.4 Elementare Termumformungen auf den natürlichen Zahlen . . . 8
1.5 Die ganzen Zahlen - $\mathbb{Z}$ . . . 9
1.6 Elementare Rechengesetze und Termumformungen in $\mathbb{Z}$ . . . 10
1.7 Die rationalen Zahlen - $\mathbb{Q}$ . . . 11
1.8 Rechengesetze der Bruchrechnung . . . 13
1.9 Die reellen Zahlen - $\mathbb{R}$ . . . 15
1.10 Potenzen und Wurzeln . . . 15
1.11 Warum ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl? . . . 18
1.12 Logarithmen . . . 19
1.13 Rechnen mit Buchstaben – Geht das? . . . 20
1.14 Die binomischen Formeln . . . 22
1.15 Bruchterme . . . 24
1.16 Aufspalten oder Zusammenfassen von Bruchtermen . . . 24
1.17 Vereinfachen von Brüchen . . . 25
1.18 Bruchterme mit Wurzeln . . . 25
1.19 Terme mit Potenzen und/oder Logarithmen . . . 26

2 Algebra - Gleichungen **27**

2.1 Äquivalenzumformungen . . . 28
2.2 Lineare Gleichungen und Ungleichungen . . . 29
2.3 Quadratische Gleichungen . . . 31
2.4 Kubische Gleichungen . . . 35
2.5 Gleichungen höherer Ordnung . . . 36
2.6 Betragsgleichungen . . . 38
2.7 Bruchgleichungen . . . 39
2.8 Wurzelgleichungen . . . 41
2.9 Logarithmische Gleichungen . . . 41
2.10 Exponentialgleichungen . . . 42
2.11 Lineare Gleichungssysteme . . . 44

3 Geometrie **49**

3.1 Grundbegriffe der Geometrie . . . 50
3.2 Dreiecke . . . 52
3.3 Kongruenz und Ähnlichkeit bei Dreiecken . . . 55
3.4 Rechtwinklige Dreiecke . . . 56
3.5 Trigonometrie . . . 60
3.6 Weitere geometrische Erkenntnisse . . . 62

Kapitel 1

Arithmetik - Das Rechnen mit Zahlen

Zu Beginn dieses Kurses werden wir uns mit der reinen Arithmetik beschäftigen, also dem Rechnen. Das bedeutet, dass wir uns die verschiedenen Zahlenräume klar machen, die Fachbegriffe für die mathematischen Operationen und Gesetze festlegen und zum guten Schluß, anhand von Aufgaben, mathematisch korrekte Schreibweisen und Schlussfolgerungen einüben.

1.1 Die natürlichen Zahlen - $\mathbb{N}$

Schon zu Beginn der Evolution hat der Mensch sich mit der Größe von Mengen beschäftigt: Die Menge der in seinem Leben erlegten Mammuts, die Anzahl der Perlen einer Kette, die Größe seiner Schafherde. Selbst Säuglinge haben von Geburt an eine Vorstellung einer großen und einer kleinen Menge, also von „viel“ und „wenig“.
Da wir, wenn wir eine Menge von gleichen Objekten vorliegen haben, nicht immer wieder neu beginnen wollen, sie zu zählen oder sie paarweise mit den Elementen einer anderen Menge zu vergleichen, haben sich findige Geister eines Kniffs bedient: Um die Anzahl von Elementen auszudrücken, wurde der abstrakte Begriff der **Kardinalzahlen**[1] (Zählzahlen) erfunden. Hierbei handelt es sich um eine Menge, die mit $\mathbb{N}$ bezeichnet wird und deren Elemente die Symbole unsere Zahlen sind. Die Menge der **natürlichen Zahlen** schreiben wir als

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\},$$

wobei in den geschweiften Klammern (Mengenklammern) nur exemplarisch die ersten 3 Zahlen aufgezählt werden. Jeder weiß, wie diese Reihe fortzusetzen ist und dass sie unendlich ist. Jede Folgezahl erhält man durch dazuzählen von 1. Das bedeutet:

> ***Merke:*** *Die natürlichen Zahlen sind nach oben unbeschränkt. Das bedeutet, zu jeder positiven Zahl m existiert eine natürliche Zahl n, die größer als m ist. Es gibt also keine größte natürliche Zahl.*

Im Allgemeinen enthält diese Menge nicht die Null, in mancher Literatur wird das anders gehandhabt. Wir schreiben $\mathbb{N}_0$, wenn wir die natürlichen Zahlen mit der Null meinen.

1.2 Grundlegende mathematische Begriffe

Mit den natürlichen Zahlen und der Null, also $\mathbb{N}_0$, können wir nun rechnen. Damit entstehen **Terme** (Rechenausdrücke) und die dazugehörigen mathematischen Begriffe seien hier der Voll-

[1] im Lateinischen bedeutet cardo „Türangel“, „Dreh- und Angelpunkt“; als Lehnübersetzung von spätlateinisch „numerus cardinalis“ bedeutet es Zahlwort, mit dem etwas Gezähltes ausgedrückt wird: Natürliche Zahl; Grundzahl; auch Mächtigket von Mengen.

ständigkeit noch einmal aufgeführt. Hierbei seien a, b, c Elemente der natürlichen Zahlen, in mathematischer Schreibweise: $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Definition 1.2.1: *Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Dann sind die vier Grundrechenarten wie folgt definiert:*

Rechenoperation	*Symbolik*	a	b	c
Addition	$a + b = c$	*Summand*	*Summand*	*Summe*
Subtraktion	$a - b = c$	*Minuend*	*Subtrahend*	*Differenz*
Multiplikation	$a \cdot b = c$	*Faktor*	*Faktor*	*Produkt*
Division	$a : b = c$	*Dividend*	*Divisor*	*Quotient*

1.3 Elementare Rechengesetze auf den natürlichen Zahlen

Schauen wir uns nun die grundlegenden Gesetze für das Rechnen auf der Menge der natürlichen Zahlen inklusive der Null an.
Wir rechnen von links nach rechts unter der Beachtungen, dass zuerst die Punktrechnung, also Multiplikation und Division, durchgeführt wird, bevor die Strichrechnung, Addition und Subtraktion, durchgeführt wird. Dieses Vorgehen ist Ihnen sicher unter dem kurzen Stichwort „Punkt vor Strich“ bekannt. Bei diesem Vorgehen handelt es sich um eine Absprache, daher können wir dies als Definition formulieren, denn es gibt hier nichts zu beweisen.

Beispiel 1.3.1:

- $3 \cdot 5 + 7 \cdot 4 = 15 + 28 = 43$
- $3 \cdot 4 : 2 + 2 : 2 = 12 : 2 + 1 = 6 + 1 = 7$

Des weiteren können Klammern gesetzt werden. Diese müssen von innen nach außen aufgelöst werden. Klammern können nur zur Verdeutlichung gesetzt werden, können aber auch eine gewisse Reihenfolge der Rechenoperationen erzwingen.

Beispiel 1.3.2:

- $(24 \cdot 4) + (8 : 2) = 96 + 4 = 100$
- $24 \cdot (4 + 8) : 2 = 24 \cdot 12 : 2 = 288 : 2 = 144$
- $24 \cdot [(4 + 8) : 2] = 24 \cdot [12 : 2] = 24 \cdot 6 = 144$

Definition 1.3.3:

- *Terme werden von links nach rechts gelesen und bearbeitet.*
- *Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ und sei $a + b \cdot c$ ein Term. Es gilt, dass zuerst die Multiplikation $b \cdot c$ durchgeführt wird und dann die Addition mit a.*
- *Bei ineinandergeschachtelten Klammern wird zuerst die innerste Klammer ausgerechnet.*

Für die Addition und die Multiplikation gelten das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz. Das Kommutativgesetz[2] besagt, dass es bei diesen beiden Rechenarten nicht auf die Reihenfolge der Zahlen ankommt. Dies leuchtet unmittelbar ein, wenn Sie an Ihre eigenen Erfahrungen denken. Ob Sie erst drei Sahnetortenstücke und später vier essen oder zuerst vier Tortenstücke und dann

[2] lateinisch commutare = vertauschen

drei verspeisen: Das Ergebnis wird das gleiche sein, es wird Ihnen beide Male schlecht sein. Auch ob Sie zur Flächenberechnung „Länge · Breite“ oder „Breite · Länge“ rechnen, hat keinen Einfluss auf die Größe der Fläche.

Beispiel 1.3.4:

- $4 \cdot 5 = 20$
  $5 \cdot 4 = 20$
- $3 + 12 = 15$
  $12 + 3 = 15$

Es ist in der Mathematik üblich, Gesetzmäßigkeiten so allgemein als möglich aufzuschreiben. Dies hat den Vorteil, dass wir uns nicht für jede einzelne konkret vorliegende Rechnung überlegen müssen, ob wir nun korrekt gerechnet haben oder nicht. Das führt dazu, dass wir unsere Objekte, mit denen wir arbeiten, durch Buchstaben ersetzen, sogenannte **Variablen**. Sie sind Repräsentanten der jeweiligen Objekte, für die wir Regeln gefunden haben.
In unserem Fall schreiben wir daher die beiden bisher besprochenen Gesetze wie folgt mathematisch korrekt formuliert auf.

Satz 1.3.5 (Kommutativgesetz der Addition und Multiplikation):
Für beliebige $a, b \in \mathbb{N}$ gilt:

- $a + b = b + a$ — *Kommutativgesetz der Addition*
- $a \cdot b = b \cdot a$ — *Kommutativgesetz der Multiplikation*

Das Assoziativgesetz ist eine verwandte Gesetzmäßigkeit, die aussagt, dass es egal ist, ob man bei drei Summanden (Faktoren) zuerst die ersten beiden addiert (multipliziert) und dann den dritten hinzunimmt oder ob man zuerst die letzten beiden Summanden (Faktoren) zuerst addiert (multipliziert) und dann den ersten addiert (multipliziert). Auch wenn man gar keinen Klammern setzt, erhält man das gleiche Ergebnis. Auch hierfür erst wieder ein Beispiel.

Beispiel 1.3.6:

- $(3 + 12) + 15 = 15 + 15 = 30$
  $3 + (12 + 15) = 3 + 27 = 30$
  $3 + 12 + 15 = 15 + 15 = 30$
- $(4 \cdot 5) \cdot 25 = 500$
  $4 \cdot (5 \cdot 25) = 500$
  $4 \cdot 5 \cdot 25 = 500$

Jetzt das Assoziativgesetz in mathematischer Schreibweise:

Satz 1.3.7 (Assoziativgesetz der Addition und Multiplikation):
Für beliebige $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt:

- $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ — *Assoziativgesetz der Addition*
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$ — *Assoziativgesetz der Multiplikation*

Als letztes kommt noch das Distributivgesetz[3] dazu, zu deutsch Verteilungsgesetz. Hierbei wird festgelegt, wie das Auflösen von Klammern bei zwei verschiedenen Operatoren funktioniert.
Als Beispiel dient die Flächenberechnung eines Rechtecks. Jeder weiß, daß die Fläche als „Breite · Höhe“ definiert ist, also

$$A = a \cdot b$$

[3] lateinisch: distribuere = verteilen

Verlängert man zum Beispiel die Breite um ein Stück z, so ergibt sich daraus folgende abgeänderte Formel:

$$A = (a + z) \cdot b$$

Dies können wir nun auch wie folgt berechnen:

$$A = (a + z) \cdot b = a \cdot b + z \cdot b$$

Anschaulich bedeutet die erste Flächenberechnung, dass wir eine Seite vergrößert haben, die zweite, dass wir das neue Rechteck als Summe zweier Teilrechtecke betrachten können. Das Ergebnis ist das Gleiche.
Auch hierfür noch ein reines Zahlenbeispiel.

Beispiel 1.3.8:

- $(3 + 12) \cdot 15 = 15 \cdot 15 = 225$
  $3 \cdot 15 + 12 \cdot 15 = 45 + 180 = 225$

- $(33 + 9) : 3 = 42 : 3 = 14$
  $33 : 3 + 9 : 3 = 11 + 3 = 8$

Jetzt das Distributivgesetz in mathematischer Schreibweise:

Satz 1.3.9 (Distributivgesetz):
Für beliebige $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt:

- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ — *Distributivgesetz der Addition mit der Multiplikation*

oder $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$

- $(a + b) : c = a : c + b : c$ — *Distributivgesetz der Addition mit der Division*

Wir beschränken uns in diesem Kurs darauf, die oben genannten Rechengesetze anzuwenden. In späteren Vorlesungen ist es eine wesentliche Arbeit der Mathematiker diese Sätze zu beweisen.

1.4 Elementare Termumformungen auf den natürlichen Zahlen

Nun ist die Zeit reif, die im vorherigen Kapitel aufgeführten Gesetze an beispielhaften Termumformungen „arbeiten“ zu sehen. Schließlich macht das einen großen Teil unserer täglichen Arbeit aus, unübersichtliche und lange Rechenterme zu vereinfachen und übersichtlicher zu machen. Insbesondere arbeiten wir nicht nur mit Zahlen. Viel öfter haben wir Formeln, in denen Buchstaben, die sogenannten Variablen, als Platzhalter für spätere Zahlen dienen. Daher werden wir fast ausschließlich mit Variablen rechen. Dies werden Sie in den Übungen vertiefen und dabei das Augenmerk noch einmal auf eine akkurate mathematische Schreibweise richten und das richtige Begründen üben.
Zunächst versuchen wir folgenden Rechenausdruck zu vereinfachen. Dabei soll pro Umformung immer nur ein Gesetz angewendet werden, damit Sie genau sehen, wie und warum die Umformungen zum Erfolg führen. In späteren Aufgaben werden Sie das sicherlich komprimieren.

Beispiel 1.4.1:

$[44 - 22 : (3 + 8)] \cdot (25 \cdot 18 \cdot 4)$	*zu berechnender Term*
$= [44 - 22 : 11] \cdot (25 \cdot 18 \cdot 4)$	*1. runde Klammer zuerst ausrechen*
$= [44 - 22 : 11] \cdot (25 \cdot 4 \cdot 18)$	*Kommutativgesetz in der 2. Klammer*
$= [44 - 22 : 11] \cdot (25 \cdot 4 \cdot 18)$	*1. runde Klammer Punkt vor Strich*

$$
\begin{aligned}
&= [44-2] \cdot (25 \cdot 4 \cdot 18) && \textit{eckige Klammer ausrechen} \\
&= 42 \cdot (25 \cdot 4 \cdot 18) && \textit{runde Klammer 1. Multiplikation} \\
&= 42 \cdot (100 \cdot 18) && \textit{runde Klammer zuerst ausrechen} \\
&= 42 \cdot 1800 && \textit{Multiplikation durchführen} \\
&= 75600
\end{aligned}
$$

Noch ein Beispiel:

Beispiel 1.4.2:

$$
\begin{aligned}
& [25(a+8) + 1500 - 5a] + [(a+5) \cdot 4] && \textit{zu berechnender Term} \\
&= [25 \cdot a + 200 + 1500 - 5a] + [(a+5) \cdot 4] && \textit{Ausmulti. der 1. runden Klammer} \\
& && = \textit{Distributivgesetz} \\
&= [25a + 1700 - 5a] + [a \cdot 4 + 5 \cdot 4] && \textit{in der 1. eckigen Klammer Zahlen Zusammen-} \\
& && \textit{fassen, Ausmulti. der 2. runden Kalmmer} \\
& && = \textit{Distributivgesetz} \\
&= [25a - 5a + 1700] + [4a + 20] && \textit{Kommutativgesetz in der 1. eckigen Klammer,} \\
& && \textit{Vereinfachung der 2. eckigen Klammer} \\
&= [20a + 1700] + [4a + 20] && \textit{Zusammenfassung der 1. eckigen Klammer} \\
&= 20a + 1700 + 4a + 20 && \textit{Assoziatigesetz (Weglassen der Klammern)} \\
&= 20a + 4a + 1700 + 20 + && \textit{Kommutativgesetz} \\
&= 24a + 1720
\end{aligned}
$$

1.5 Die ganzen Zahlen - $\mathbb{Z}$

Wie Sie vielleicht festgestellt haben, haben wir im vorherigen Kapitel zum Beispiel beim Distributivgesetz, nur die Addition in der Klammer zugelassen. Warum haben wir dort nicht direkt auch die Subtraktion berücksichtigt?
Bisher waren ausschließlich auf der Menge der natürlichen Zahlen unterwegs. Die Subtraktion zweier natürlicher Zahlen führt aber nicht immer auf eine natürliche Zahl. Folgendes Beispiel vermag das verdeutlichen: $5 - 3 = 2$ ist in den natürlichen Zahlen durchführbar und ergibt eine natürliche Zahl ($2 \in \mathbb{N}$). Aber was ist $3 - 5$? Die Antwort liegt für Sie vermutlich auf der Hand -2. Aber -2 ist keine natürliche Zahl ($2 \notin \mathbb{N}$). Wir haben also mit dieser Rechenoperation unseren bisherigen Zahlenraum verlassen. Da wir aber aus ganz praktischen Gründen solche Zahlen zulassen wollen und auch damit Rechnen wollen (man denke an frostige Außentemperaturen oder Schuldenberge), erweitern wir die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Wir finden für jede Zahl aus $a \in \mathbb{N}$ eine sogenannte **Gegenzahl** $-a$, so dass $a + (-a) = 0$. Diese neuen Zahlen zusammen mit $\mathbb{N}$ ergeben die **Ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Wir können also $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{Z}$ auffassen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

In diesem neuen Zahlenraum ist die Subtraktion immer durchführbar, das heißt, nach einer Subtraktion zweier ganzer Zahlen ist das Ergebnis wieder eine ganze Zahl.

1.6 Elementare Rechengesetze und Termumformungen in $\mathbb{Z}$

Wir rufen uns zunächst die elementaren Rechenregeln für die ganzen Zahlen ins Gedächtnis. Dazu führen wir den Begriff des Betrages einer Zahl ein.

Definition 1.6.1: *Der Betrag einer Zahl wird durch zwei senkrechte Striche um eine Zahl notiert und wie folgt definiert: Sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann gilt* $|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$

Beispiel 1.6.2: $|3| = 3 \quad |-7| = 7$

Definition 1.6.3: *Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann sind die folgenden Rechenregeln wie folgt definiert:*

Rechenoperation	*Regel*	*Beispiel*
Addition	*Zwei Zahlen mit gleichem Vorzeichen werden addiert, indem man ihre Beträge addiert und der Summe das gemeinsame Vorzeichen gibt.*	$(+3) + (+7) = +10$ $(-3) + (-7) = -10$
	Zwei Zahlen mit verschiedenem Vorzeichen werden addiert, indem man die betragsmäßig kleinere Zahl von der betragsmäßig größeren Zahl subtrahiert und dieser Differenz das Vorzeichen der betragsmäßig größeren Zahl gibt.	$(+3) + (-4) = -(4-3) = -1$ $(-3) + (+4) = +(4-3) = 1$
Subtraktion	*Eine ganze Zahl wird subtrahiert, indem man ihre Gegenzahl addiert.*	$(+8) - (+5) = (+8) + (-5) = +3$ $(-8) - (-5) = (-8) + (+5) = (-3)$
Multiplikation	*Zwei Zahlen mit gleichem Vorzeichen werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und dem Produkt immer ein positives Vorzeichen gibt.*	$(+3) \cdot (+4) = +12$ $(-3) \cdot (-4) = +12$
	Zwei Zahlen mit verschiedenem Vorzeichen werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und dem Produkt immer ein negatives Vorzeichen gibt.	$(+3) \cdot (-4) = -12$ $(-3) \cdot (+4) = -12$
Division	*Zwei Zahlen mit gleichem Vorzeichen werden dividiert, indem man die Beträge dividiert und dem Produkt immer ein positives Vorzeichen gibt.*	$(+12) \div (+4) = +3$ $(-12) : (-4) = +3$
	Zwei Zahlen mit verschiedenem Vorzeichen werden dividiert, indem man die Beträge dividiert und dem Produkt immer ein negatives Vorzeichen gibt.	$(+12) \div (-4) = -3$ $(+12) : (+4) = -3$

Bemerkung 1.6.4:

- *Mit der vorherigen Definition stellen wir fest, dass wir die Subtraktion als Rechenoperation*

nicht mehr benötigen. Vielmehr lässt sich jede Subtraktion als eine Addition der Gegenzahl darstellen.

- *Wir können ebenfalls nachrechnen, dass die Gesetze aus dem vorherigen Kapitel für die natürlichen Zahlen auch auf den ganzen Zahlen gelten.*

Mit diesem Wissen lassen sich nun auch komplexere Termumformungen bewerkstelligen (siehe Übungen).

1.7 Die rationalen Zahlen - $\mathbb{Q}$

Bisher können wir die Addition, Subtraktion und die Multiplikation auf ganzen Zahlen durchführen und erhalten eine Ergebnis, dass wieder in den ganzen Zahlen liegt. Ist das bei der Division auch so?
Teilen wir 20 Bonbons an 5 Kinder auf, bekommt jedes Kind 4 Bonbons, das Ergebnis der Rechnung $10 : 5$ ergibt wieder eine ganze Zahl. Auch $100\,€$ Schulden, die unter 2 Personen aufgeteilt werden sollen, liefern wieder eine ganze Zahl, nämlich $50\,€$. Die dazugehörige Rechnung würde lauten $-100\,€ : 2 = -50\,€$. Aber spätestens wenn nur noch drei Fertigpizzen im Haus an vier Personen verteilt werden sollen, müssen wir den Zahlenraum $\mathbb{Z}$ verlassen.
Es handelt sich beim Pizzaproblem um ein Anteilproblem. Bei gerechter Teilung wird jeder weniger als ein ganzes bekommen. Was muss man dafür tun? Jede Pizza wird durch vier geteilt, so dass jede Person sich davon ein Stück Pizza nehmen kann. Diesen Anteil nennt man **Nenner**. Diesen Vorgang kann jeder dreimal machen, das ist der sogenannte **Zähler**. Diese neue anteilige Schreibweise ist als die Menge der rationalen Zahlen definiert, als die Menge der Brüche:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0 \right\}$$

Hier ist keine aufzählende Schreibweise mehr sinnvoll, wie man sich anhand von Beispielen klarmachen kann. Deshalb wird für die Menge rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ eine beschreibenden Mengendarstellung gewählt. p wird mit **Zähler** und q mit **Nenner** bezeichnet. Eine Division durch Null wird ausgeschlossen, aber warum?
Betrachten wir einmal die Aufgabe

$$125 : 0 = a$$

von der wir zur Zeit noch nicht wissen, was dort herauskommen soll. Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation, also stellen wir einmal die dazugehörige Umkehraufgabe auf. Sie lautet

$$a \cdot 0 = 125$$

Aber welche Zahl muss a annehmen, damit die Gleichung erfüllt werden kann? Da a immer mit Null multipliziert wird, kann dort nie 125 herauskommen. Also scheint durch die Annahme, dass $125 : 0$ erlaubt sein könnte, ein Widerspruch zu entstehen. Deshalb wird dieser Fall nicht zugelassen, schließlich wollen wir ein widerspruchsfreies System.

Definition 1.7.1: *Folgende weiter Begrifflichkeiten führen wir ein:*

- *Brüche, deren Zähler 1 ist, nennt man* ***Stammbrüche****.*
- *Brüche, deren Zähler kleiner als der Nenner ist, nennt man* ***echte Brüche****.*
- *Brüche, deren Zähler größer ist als der Nenner, nennt man* ***unechte Brüche****. Diese lassen sich in eine* ***gemischte Zahl*** *umwandeln.*

- *Lässt sich der Bruch durch Durchführung der Division in eine Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen umformen, so handelt es sich um* ***endliche*** *oder* ***abbrechende Dezimalzahl****.*
- *Lässt sich der Bruch durch Durchführung der Division in eine Dezimalzahl mit unendlich sich wiederholend vielen Nachkommastellen umformen, so handelt es sich um eine* ***periodische Dezimalzahl****.*

Jeder Bruch kann durch Ausführen der Division in eine Dezimalzahl überführt werden. Das ist durch schriftliche Division bis zu jeglicher Nachkommastelle auch per Hand möglich.

Beispiel 1.7.2:

- $\frac{1}{125}$ *ist eine Stammbruch*
- $\frac{2}{5}$ *ist eine echter Bruch*
- $\frac{5}{2}$ *ist eine unechter Bruch ...*
- $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ *... und lässt sich in eine gemischte Zahl umwandeln*
- $\frac{2}{5} = 0,4$ *ist eine endliche Dezimalzahl*
- $\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$ *ist eine periodische Dezimalzahl*

Auch der umgekehrte Weg ist möglich: Jede rationale Zahl in Dezimalschreibweise, egal ob endlich oder ab einer gewissen Stelle periodisch, lässt sich in einen Bruch umwandeln.

Beispiel 1.7.3:

- $x = 0,71$ *und* $y = 1,2563$ *sind rational, da*

$$x = \frac{71}{100} \text{ bzw. } y = \frac{12563}{10000}.$$

- *Auch* $a = 0,212121\ldots =: 0,\overline{21}$ *und* $b = 0,9999\ldots =: 0,\overline{9}$ *sind rationale Zaheln. Den jeweils zugehörigen Bruch* p/q *findet man hier durch einen kleinen Trick. Es gilt:*

$$\begin{aligned} 100 \cdot 0,\overline{21} &= 21,\overline{21} \\ 1 \cdot 0,\overline{21} &= \ 0,\overline{21} \end{aligned}$$

und nach Subtraktion der linken Seite der beiden obigen Gleichungen

$$100 \cdot 0,\overline{21} - 1 \cdot 0,\overline{21} = (100-1) \cdot 0,\overline{21} = 99 \cdot 0,\overline{21}$$

und nach Subtraktion der rechten Seiten

$$21,\overline{21} - 0,\overline{21} = 21$$

Also gilt

$$99 \cdot 0,\overline{21} = 21$$

Dies bedeutet nach Division der Gleichung durch 99, dass

$$\boxed{0,\overline{21} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}}.$$

Insbesondere ist:

$$\left.\begin{aligned} 10 \cdot 0,\overline{9} &= 9,\overline{9} \\ 1 \cdot 0,\overline{9} &= 0,\overline{9} \end{aligned}\right\} \implies 9 \cdot 0,\overline{9} = 9 \iff \boxed{0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1}.$$

Merke: *Die Dezimalbruchdarstellung einer Zahl ist nicht eindeutig!*

$$0,5 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \dots$$

$$0,\overline{9} = 1\,.$$

1.8 Rechengesetze der Bruchrechnung

Auch für die Bruchrechnung gibt es wieder einige Regeln, die in diesem Kapitel zusammengefasst werden und die Sie unbedingt beherrschen müssen.
Kommen wie als erstes zum Erweitern und Kürzen. Erweitern bedeutet anschaulich, dass Sie bei den Anteilen eine Verfeinerung vornehmen, Kürzen bedeutet das Gegenteil, also eine Vergröberung. Damit beim Verfeinern oder Vergröberen aber keine Wertänderung entsteht, muss dies im Nenner und im Zähler durchgeführt werden.

Definition 1.8.1: *Kürzen und Erweitern:*

- *Ein Bruch wird* ***erweitert****, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert. Sein Wert ändert sich dabei nicht. In Formeln:*

$$\frac{p}{q} = \frac{p \cdot a}{q \cdot a} \text{ für alle } a, p, q \in \mathbb{Z} \text{ und } a \neq 0.$$

- *Ein Bruch wir gekürzt, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl dividiert. Sein Wert bleibt gleich. In Formeln:*

$$\text{Sei } \frac{r}{s} = \frac{p \cdot a}{q \cdot a} \text{ mit } a, p, q, r, s \in \mathbb{Z},$$

das heißt Zähler und Nenner haben einen gemeinsamen Faktor, dann gilt

$$\frac{r}{s} = \frac{p \cdot a}{q \cdot a} = \frac{p}{q} \text{ für alle } a \in \mathbb{Z} \text{ und } a \neq 0.$$

Bemerkung 1.8.2: *Die obige Definition bedeutet, dass es für ein und denselben Wert unendliche viele Darstellungen gibt. Man kann jeweils diejenige wählen, die für das gerade vorliegende Problem am besten passt.*
Meistens ist es sinnvoll Brüche soweit als möglich zu kürzen. Das führt dann dazu, dass man entweder weniger in den Taschenrechner eingeben muss oder es beim Weiterrechnen erheblich einfacher hat. Gewöhnen Sie sich an, Brüche immer soweit als möglich zu kürzen.

Beispiel 1.8.3: *Zum Kürzen und Erweitern:*

1. *Kürzen:* $\frac{35}{49} = \frac{7 \cdot 5}{7 \cdot 7} = \frac{5}{7}$
2. *Erweitern:* $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8}$
3. *Mehrfaches Kürzen:* $\frac{228}{56} = \frac{114}{28} = \frac{57}{14}$

Neben dem reinen Umformen von Brüchen, benötigen wir natürlich auch die üblichen Rechenarten wie Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren.
Betrachten wir als erstes die Addition (und damit auch die Subtraktion). Es leuchtet unmittelbar ein, dass zum Beispiel verschieden viele Viertel problemlos wie folgt addiert werden können:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10}{4}$$

Brüche können auch unterschiedliche Nenner haben. Wir können aber dafür sorgen, dass sie die gleichen Nenner bekommen. Wie? Zwei Brüche mit unterschiedlichem Nenner werden addiert, indem sie so erweitert werden, dass sie den gleichen Nenner haben. Dann können die Zähler addiert werden. In Formeln: Seien $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 q_2} + \frac{p_2 \cdot q_1}{q_2 q_1} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$$

Das Produkt der beiden Nenner als gemeinsamen sogenannten Hauptnenner zu verwenden funktioniert immer. Es ist aber nicht immer sinnvoll, insbesondere dann, wenn der Größenunterschied der beiden Nenner sehr groß ist. Zum Beispiel würde aus $\frac{1}{10} + \frac{1}{5000}$ der mit diesem Verfahren ermittelte Hauptnenner 50.000 sein. Man erkennt aber schnell, dass 5000 auch als Hauptnenner taugt und damit die Rechnung nicht künstich aufgebläht wird. Eleganter ist es also, das **kleinste gemeinsame Vielfache**, kurz **kgV**, zu bestimmen. Dafür gibt es verschiedene Verfahren, die hier nicht weiter besprochen werden. Im schlimmsten Fall handelt es sich dann um das Produkt der beiden Nenner.
Mit Hilfe des kgVs lässt sich die Addition von Brüchen nun wie folgt definieren:

Definition 1.8.4: *Seien $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, so gilt:*

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot \frac{kgV(q_1,q_2)}{q_1} + p_2 \cdot \frac{kgV(q_1,q_2)}{q_2}}{kgV(q_1, q_2)}$$

Die Multiplikation zweier Brüche gestaltet sich deutlich einfacher.

Definition 1.8.5: *Das Produkt zweier Brüche wird berechnet, indem Zähler und Nenner miteinander multipliziert werden. In Formeln: Seien $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, so gilt:*

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$$

Nun kann jede ganze Zahl a als Bruch geschrieben werden, also $\frac{a}{1}$. Damit ergibt sich für die Multiplikation eines Bruchs mit einer ganzen Zahl folgende Regel:

Definition 1.8.6: *Das Produkt einer ganzen Zahl mit einem Bruch wird berechnet, indem der Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert wird und der Nenner beibehalten wird. In Formeln: Seien $p, q, a \in \mathbb{Z}$, so gilt:*

$$a \cdot \frac{p}{q} = \frac{a}{1} \cdot \frac{p}{q} = \frac{a \cdot p}{1 \cdot q} = \frac{a \cdot p}{q}$$

Zum Schluß fehlt noch die Division. Hier wird der Begriff des **Kehrwertes** bzw. des **Kehrbruchs** verwendet. Zu einem Bruch $\frac{p}{q}$ ist der Kehrwert der Bruch $\frac{q}{p}$, der also durch Vertauschen von Zähler und Nenner entstanden ist.

Definition 1.8.7: *Zwei Brüche werden miteinander dividiert, indem der erste Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert wird. In Formeln: Seien $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, so gilt:*

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

Beispiel 1.8.8: *Zum Rechnen mit Brüchen:*

1. *Addieren:*
$$\frac{4}{5} - 3\frac{1}{10} = \frac{8}{10} - \frac{31}{10} = \frac{-23}{10} = -2\frac{3}{10}$$
2. *Multiplizieren:*
$$\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{18} \cdot \frac{2}{25} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{25} = \frac{\cancel{5}^{1} \cdot 1 \cdot \cancel{2}^{1}}{\cancel{2}_{1} \cdot 6 \cdot \cancel{25}_{5}} = \frac{1}{30}$$

3. Dividieren:

$$\frac{36}{11} : \frac{18}{33} - \frac{15}{14} : \frac{5}{7} = \frac{\cancel{36}^{2}}{\cancel{11}_{1}} \cdot \frac{\cancel{33}^{3}}{\cancel{18}_{1}} - \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{14}_{2}} \cdot \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{5}_{1}} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 1} - \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6}{1} - \frac{3}{2} = 6 - \frac{3}{2} = 4\frac{1}{2}$$

4. Doppelbrüche:

$$\frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{7}}{\frac{35}{12}} = \frac{\frac{21}{35} + \frac{10}{35}}{\frac{35}{12}} = \frac{\frac{31}{35}}{\frac{35}{12}} = \frac{31}{35} : \frac{35}{12} = \frac{31}{35} \cdot \frac{12}{35} = \frac{372}{1225}$$

Wie schon bei den ganzen Zahlen gelten auch hier die vorherigen Rechengesetze.

Nun noch ein Wort zum Zusammenhang zwischen Brüchen, Dezimalzahlen und Prozent. Wir haben bereits festgestellt, dass wir jeden Bruch in eine Kommazahl umwandeln können. Nicht immer ist sie endlich, meist reicht es ja auch für reale Berechnung auf eine gewisse Anzahl von Nachkommastellen zu runden. Wie kommen wir jetzt zum Prozentwert?
Machen wir uns klar, was Prozent heißt. Prozent kommt aus dem Lateinischen und bedeutet „pro Hundert“. Der einfachste Fall ist der, dass wir einen Bruch auf Hundertstel erweitern oder kürzen. Dann ist die Zahl im Zähler der Prozentwert, zum Beispiel:

$$\frac{1}{25} = \frac{4}{100} = 4\%$$

Fast genauso einfach lässt sich jede Zehnerpotenz in Prozent durch einfaches Verschieben des Kommas um zwei Stellen nach rechts umwandeln. Auch hier wieder Beispiele:

Beispiel 1.8.9:

$$\frac{2}{10000} = 0,0002 = 0,02\%$$

$$\frac{5}{16} = 0,3125 = 31,25\%$$

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3} \approx 0,3333 = 33,33\%$$

1.9 Die reellen Zahlen - $\mathbb{R}$

Noch sind wir nicht am Ende der Zahlenerweiterungen. Es gibt noch eine größere Zahlenmenge mit der wir täglich arbeiten und die noch mehr Zahlen umfasst als $\mathbb{Q}$. Wir können sagen, dass $\mathbb{Q}$ noch nicht die ganze Zahlengerade ausfüllt, es sind also noch Lücken zu finden, obwohl es schon jetzt nicht gelingt zu jeder rationalen Zahl genau einen Vorgänger und genau einen Nachfolger zu benennen. Dies ist in $\mathbb{Z}$ noch möglich.

1.10 Potenzen und Wurzeln

Wenden wir uns zunächst der Potenzschreibweise zu. Hierbei handelt es sich um eine verkürzte Schreibweise für die Multiplikation, die Sie bereits aus der Flächenberechnung oder Volumenberechnung kennen. Das Volumen eines Würfels der Kantenlänge 3cm berechnet als Produkt von Länge mal Höhe mal Breite, das heißt:$V = 3cm \cdot 3cm \cdot 3cm = 3^3 cm^3 = 27cm^3$.

Definition 1.10.1: *Ein Produkt aus n gleichen Faktoren heißt* ***Potenz****. In Formeln: Sei* $a \in \mathbb{Q}$ *und* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

*Man nennt a die **Basis** und n den **Exponenten** von a^n und bezeichnet a^n selbst als n**-te Potenz** von a. Nach dieser Definition darf n nur eine ganze Zahl außer 0 und 1 sein, da ein Produkt mindestens aus zwei Faktoren besteht. Der Potenzbegriff wird daher wie folgt erweitert:*

$$a^1 = a; \qquad a^0 = 1 \text{ für } a \neq 0$$

Beispiel 1.10.2: *Ausrechnen von Potenzen:*

$$8^2 = 8 \cdot 8 = 64 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \qquad (-0,2)^2 = (-0,2)(-0,2) = 0,04$$

Folgende Rechengesetze gelten für Potenzen:

Definition 1.10.3: *Für alle von 0 verschiedenen Zahlen a und b und alle natürlichen Zahlen n und m gelten folgende Gleichungen:*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Daraus ergibt sich dann:

$$1 = a^0 = a^{1-1} = a^1 \cdot a^{-1}$$

Was kann dann a^{-1} bedeuten? Gesucht ist also die Zahl, die mit a multipliziert 1 ergibt. Das erfüllt $\frac{1}{a}$, also gilt:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Damit definieren wir zusätzlich zu den bisherigen Regeln:

Definition 1.10.4: *Für alle alle ganzen Zahlen n gilt:*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Die vorher formulierten Potenzgesetze aus Definition 1.10.3 gelten damit auch für nicht positive Zahlen m und n. Damit gilt dann auch:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \textit{und} \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Beispiel 1.10.5: *Rechnen mit Potenzen:*

$$5^4 \cdot 5^{-5} \cdot 5^3 = 5^{4-5+3} = 5^2 = 25$$
$$\frac{(17^2)^{-6}}{17^{19} \cdot 17^{-3}} = \frac{17^{-12}}{17^{16}} = \frac{1}{17^{12} \cdot 17^6} = \frac{1}{17^{18}} = 17^{-18}$$

Hier nun noch einige Sonderfälle, deren Richtigkeit zu beweisen ist:

Merke:

$$0^n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

$$a > 0 \Rightarrow a^n > 0; \qquad 1^n = 1;$$

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^{2n} > 0, & \textit{weil } (-1)^{2n} = 1 \textit{ für } n \in \mathbb{N}; \\ a^{2n+1} < 0, & \textit{weil } (-1)^{2n+1} = -1 \textit{ für } n \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

Achtung: 0^0 **ist nicht definiert**, denn $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1} =$ nicht definiert, weil jetzt durch Null zu teilen wäre.
Betrachten wir nun als nächstes Potenzen mit Stammbrüchen im Exponenten, also zum Beispiel den einfachsten Fall $3^{\frac{1}{2}}$. Es gilt nach den schon besprochenen Potenzgesetzen:

$$3 = 3^1 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 2} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Gesucht ist also die Zahl, die quadriert 3 ergibt. Diese Zahl ist nicht in $\mathbb{Q}$ zu finden, was wir später beweisen. Daher definieren wir eine solche Zahl als ein neues Objekt:

Definition 1.10.6: *Potenzen mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$ - Quadratwurzeln*
*Für jede positive Zahl a ist $a^{\frac{1}{2}}$ definiert als die positive Zahl, die mit sich selbst multipliziert a ergibt. Man bezeichnet $a^{\frac{1}{2}}$ als **Quadratwurzel** oder einfach als **Wurzel** aus a und schreibt dafür auch das Symbol $\sqrt{a}$, also*

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Beispiel 1.10.7:

$$\sqrt{36} = \sqrt{6 \cdot 6} = 6 \qquad \sqrt{225} = 15$$

Die beiden vorangegangen Beispiel sind Beispiele für die sogenannten **Quadratzahlen**, hier entstehen beim Wurzelziehen, auch **Radizieren** genannt, ganze Zahlen. Das sind aber leider die Ausnahmen, wie wir gleich sehen werden.

Als nächstes betrachten wir nun wirklich beliebige Stammbrüche:

Definition 1.10.8: *Potenzen mit einem Stammbruch $\frac{1}{n}$ im Exponenten - n-te Wurzel*
*Für jede positive Zahl a und jede natürliche Zahl n ist $a^{\frac{1}{n}}$ definiert als die positive Zahl, die n-mal mit sich selbst multipliziert a ergibt. Man bezeichnet $a^{\frac{1}{n}}$ als **n-te Wurzel** aus a und schreibt dafür auch das Symbol $\sqrt[n]{a}$, also*

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Auch hier gibt es wieder Beispiele, deren Ergebnis ganzzahlig ist. Für $n = 3$ nennt man diese Zahlen **Kubikzahlen**.

Beispiel 1.10.9:

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{9 \cdot 9 \cdot 9} = 9 \qquad \sqrt[10]{1024} = 2$$

Nun machen wir den letzten Schritt. Was bedeutet dann $a^{\frac{p}{q}}$? Mit Hilfe der Potenzgesetze 1.10.3 finden wir heraus:

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{1}{q}\cdot p} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

Definition 1.10.10: *Potenzen mit einer beliebigen rationalen Zahl im Exponenten*
Für jede positive Zahl a und ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ bedeutet der Ausdruck $a^{\frac{p}{q}}$ die p-te Potenz der q-ten Wurzel aus a, das heißt:

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{1}{q}\cdot p} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Und wegen des Kommutativgesetzes der Multiplikation gilt auch:

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{p\cdot\frac{1}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Damit sind alle obigen Schreibweisen dieser Definition gleichwertig.

Beispiel 1.10.11:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{2}{3}$$

$$3^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}$$

$$\sqrt[3]{14} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{49} = \sqrt[3]{14 \cdot 4 \cdot 49} \cdot 2 = \sqrt[3]{7^3 \cdot 2^3} \cdot 2 = 7 \cdot 2 \cdot 2 = 28$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{81}} = \left(81^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 81^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 81^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{81} = \left(3^4\right)^{\frac{1}{6}} = 3^{4 \cdot \frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$$

1.11 Warum ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl?

Wie kann man nun feststellen, das $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist?

Nehmen wir einfach mal an, es gäbe eine solche Zahl $r \in \mathbb{Q}$. Dann können wir sie als Bruch in der Form

$$\sqrt{2} = r = \frac{p}{q} \quad \text{mit} \quad p, q \in \mathbb{Z},\, q \neq 0$$

schreiben. Insbesondere dürfen wir davon ausgehen, dass dieser Bruch maximal gekürzt und daher p und q teilerfremd sind, d. h. sie haben keinen gemeinsamen Teiler. Wegen

$$2 = r^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} \iff p^2 = 2 \cdot q^2,$$

ist dann p^2 durch 2 teilbar, also eine gerade Zahl. Da aber das Quadrat einer geraden Zahl genau dann gerade ist, wenn die Zahl gerade ist, ist auch p gerade und es gibt ein $m \in \mathbb{Z}$ mit

$$p = 2 \cdot m$$

bzw.

$$2q^2 = p^2 = (2 \cdot m)^2 = 4 \cdot m^2 \iff q^2 = 2 \cdot m^2.$$

Folglich sind auch q^2 und damit q gerade Zahlen und es gibt $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sodass

$$q = 2 \cdot n.$$

Zusammengenommen erhalten wir

$$r = \frac{p}{q} = \frac{2 \cdot m}{2 \cdot n} = \frac{m}{n}$$

im Widerspruch zur Annahme, dass r bereits maximal gekürzt war. Also führt unsere Annahme zu einem Widerspruch und muss daher falsch sein. Das bedeutet: Das Gegenteil ist richtig und es gibt tatsächlich kein $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2 = 2$.

■

Nach obigem Satz ist also „$\sqrt{2}$“ eine *irrationale Zahl* (ebenso $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \ldots$). Vervollständigen wir nun $\mathbb{Q}$ durch Hinzunahme dieser irrationalen Zahlen, erhalten wir nun endlich den gesamten Zahlenstrahl, also die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Offensichtlich gilt

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

1.12 Logarithmen

Eine weitere Umkehroperation des Potenzierens ist das Logarithmieren, mit dem sich der Exponent bei gegebener Basis und gegebenem Exponenten ermitteln lässt.
Kommen wir direkt zur Definition:

Definition 1.12.1: *Es seien a und b positive reelle Zahlen und $a \neq 1$. Diejenige reelle Zahl n, die die Gleichung $a^n = b$ löst, heißt der* ***Logarithmus*** *von b zur Basis a:*

$$n = \log_a b \text{ was gleichbedeutend mit } a^n = b \text{ ist.}$$

Weitere Eigenschaften des Logarithmus können wir uns aus der obigen Definition ableiten.

- Gibt es $\log_1$?
  Nein, denn der Logarithmus zur Basis 1 ist nicht definiert, da wegen der obigen Definition n die Gleichung $1^n = b$ erfüllen müsste. Für $b \neq 0$ ist diese Gleichung aber nicht lösbar und für $b = 1$ ist jede reelle Zahl n eine Lösung.

- Aus der obigen Definition folgt weiterhin:

$$\log_a(a^n) = n$$

$$a^{\log_a b} = b$$

- Außerdem gelten folgende Sonderfälle:

$$\log_a a = 1, \text{ denn } a^1 = a \text{ und}$$

$$\log_a 1 = 0, \text{ denn } a^0 = 1.$$

- Der Logarithmus ist nur für positive b definiert, denn wegen $a > 0$ ist auch $b = a^n > 0$.
- Aus letzterem folgt, dass der Logarithmus von 0 nicht definiert ist!

Aus den Potenzgesetzen lassen sich auch folgende Logarithmusgesetze herleiten.

Satz 1.12.2: *Für Logarithmen mit gleicher Basis gilt:*

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a(b^n) = n \cdot \log_a b$$

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

Besondere bzw. verkürzende Schreibweisen sind für den Logarithmus zur Basis 10 und der Logarithmus naturalis zur Basis der irrationalen Zahl e definiert:

Definition 1.12.3:

- $\log_{10} a =: \lg a$ *gelesen* l-g von a
- $\log_e a =: \ln a$ *mit* $e = 2,718281828459...$ *gelesen* l-n von a

Damit gilt also:

- $\lg b = n \Longleftrightarrow b = 10^n$

- $\ln b = n \Longleftrightarrow b = e^n$

Zum guten Schluss gibt es noch die Möglichkeit Logarithmen einer beliebigen Basis b mit $b \neq 1$ in eine anderen Basis auszudrücken.
Dazu betrachten wir die beiden folgenden Ausdrücke:

$$\log_a u = n \Longleftrightarrow a^n = u \text{ und } \log_b u = m \Longleftrightarrow b^m = u$$

Hieraus folgt:

$$a^n = b^m.$$

Nun wenden wir auf beiden Seiten den Logarithmus zur Basis a an. Das bedeutet:

$$\log_a a^n = \log_a b^m$$

Daraus folgt dann nach den Logarithmusgesetzen:

$$n \cdot \log_a a = m \cdot \log_a b$$

Da $\log_a a = 1$ folgt nun

$$n = m \cdot log_a b$$

Nun war aber auch $n = \log_a u$ und $m = \log_b u$, so dass also insgesamt gilt:

$$\log_a u = \log_b u \cdot \log_a b$$

Das bedeutet, dass die zu den beiden Basen a und b gebildeten Logarithmen zueinander proportional sind mit dem Proportionalitätsfaktor $\log_a b$. Wir können also den Zusammenhang zweier Logarithmen zu verschiedenen Basen wie folgt aufschreiben:

$$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}$$

Nur der Vollständigkeithalber ergibt sich damit für den 10er-Logarithmus oder den natürlichen Logarithmus:

$$\log_b u = \frac{\lg u}{\lg b}$$

$$\log_b u = \frac{n}{\ln b}$$

1.13 Rechnen mit Buchstaben – Geht das?

Die Arithmetik besteht nicht nur aus dem Rechnen mit Zahlen. Vielmehr besteht die Kunst der Mathematik darin, zu Abstrahieren, die Zahlen durch Buchstaben darzustellen und sich somit vom ganz konkreten Wert eines Rechenausdrucks zu befreien. Wir behandeln hier noch einmal die Grundprinzipien der Arithmetik: Prioritätsregeln, Klammern auflösen, Terme ausklammern und die binomischen Formeln. Weiterhin handelt das Kapitel von Bruchtermen und speziell deren Vereinfachung, Gleichnamigmachen und das Aufspalten.
Bisher haben wir (fast) ausschließlich Rechenausdrücke mit Zahlen betrachtet. Wir haben auch schon Variablen als Repräsentanten für Zahlen kennengelernt, wenn wir Definitionen oder Sätze aufgeschrieben haben. Sobald wir Rechenausdrücke mit Variablen aufschreiben, sprechen wir von **Termen**.
Weiterhin vereinbaren wir folgende Sprechweise: Steht eine Variable für eine beliebig wählbare, aber innerhalb einer Aufgabe konstante Zahl, so sprechen wir von einer **gebundenen Variablen** oder **Konstanten** und verwenden oft die Anfangsbuchstaben des Alphabets $a, b, c, \ldots$. Kann die Variable innerhalb einer Aufgabe beliebige Werte annehmen, so ist sie ein **freie Variable** oder kurz **Variable**. Als kennzeichnender Buchstabe werden meistens die Buchstaben am Ende des Alphabets genommen, also x, y, z.

Definition 1.13.1: *Terme*
*Ein **Term** ist ein aus Zahlen, Buchstaben (als Variablen) und Rechenzeichen gebildeter Ausdruck, der beim Belegen der Variablen mit geeigneten Zahlen eine Zahlenwert annimmt.*

Beispiel 1.13.2:

235:	*konstanter Term*
$ax+b$:	*linearer Term mit 1 Variablen, a,b gebundene Variablen*
a_1x+a_2y+a:	*linearer Term mit 2 Variablen, a_1, a_2, a gebundene Variablen*
ax^2+bx+x:	*gemischt-quadratischer Term*
$(a+b)^2$:	*Binom*
$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$:	*Polynom*
$\sqrt{x+3}$:	*Wurzelterm.*

Definition 1.13.3: *Definitionsbereich für Terme*
*Die Menge aller Zahlen, mit denen ein Term belegt werden kann, bildet den **Definitionsbereich des Terms** und wird meist mit **D** bezeichnet.*

Beispiel 1.13.4:

$\sqrt{3+x}$	*Definitionsbereich:* $D=[-3;\infty)$
	denn unter der Wurzel darf nichts negatives stehen
$\dfrac{1}{2x-6}$	*Definitionsbereich:* $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}=\{x\in\mathbb{R}\|x\neq 3\}$
	denn der Nenner darf nicht Null sein

Soll zum Ausdruck kommen, dass ein Term beispielsweise die Variable x enthält, so wird er durch $T(x)$ symbolisiert (gelesen: T von x). Die Summe mehrerer, je mit einem Faktor multiplizierter Terme

$$k_1T_1+k_2T_2+\cdots+k_nT_n$$

heißt **Linearkombination** dieser Terme. Durch sie lassen sich umfangreiche Terme aus einfacheren zusammensetzen.

Auch für Terme gelten alle bisher besprochenen Rechengesetze, zum Beispiel das Distributivgesetz, so dass folgende Gleichung gilt:

$$2\cdot(a+b)=2\cdot a+2\cdot b=2a+2b,$$

Die letzte Umformung besteht nur aus einer verkürzten Schreibweise: Zwischen Zahlen und Buchstaben kann das Multiplikationszeichen weggelassen werden.

Wofür braucht man Terme? In der obigen Gleichung erkennen Sie vielleicht die Formel für den Umfang eines Rechtecks mit den Seiten a und b. Der Vorteil ist, dass man mit dieser Formel nun den Umfang jedes beliebigen Rechtecks berechnen kann, ohne jedes Mal alle vier Seitenlängen addieren zu müssen. Im Augenblick erscheint der Vorteil noch sehr gering, Sie werden aber bald feststellen, das universelle Formeln auch große Vorteile mit sich bringen.
Wenn Sie bei einem Sachzusammenhang in der Lage sind, eine Formel aufzustellen, dann wird Sie vielleicht in einem ersten Versuch sehr kompliziert aussehen. Sie sollten dann versuchen, nach den vorgegebene bisher gefundenen Regeln auch komplizierte und „abstrakte“ Terme zu vereinfachen indem Sie

- gleichartige Strukturen (Summanden, Potenzen) zusammenfassen,

- Klammern auflösen, auch mehrfach geschachtelte,
- Brüche soweit als möglich kürzen,
- Potenzgesetze anwenden,

um nur einige Beispiele zu nennen.
Am besten betrachten wir direkt einige Beispiele.

Beispiel 1.13.5:

$$5a - (7b - 3a) = 5a - 7b + 3a = 8a - 7b$$

$$(\frac{3}{4}u - \frac{4}{5}v) - (-\frac{1}{2}u - \frac{6}{5}v) = \frac{3}{4}u - \frac{4}{5}v + \frac{1}{2}u + \frac{6}{5}v = \frac{3}{4}u + \frac{2}{4}u - \frac{4}{5}v + \frac{6}{5}v = \frac{5}{4}u + \frac{2}{5}v$$

$$\frac{9y - 5z}{13a} - \frac{7y - 9z}{13a} - \frac{y - 2z}{13a} = \frac{9y - 5z - (7y - 9z) - (y - 2z)}{13a} = \frac{-3y + 6z}{13a}$$

$$\sqrt{\frac{5z}{18x^3y}} \cdot \sqrt{\frac{45xy^3}{8z^5}} = \sqrt{\frac{5z \cdot 45xy^3}{18x^3y \cdot 8z^5}} = \sqrt{\frac{5\cancel{z} \cdot \cancel{45}^{5}\cancel{xy^3}^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{18}_{2}\cancel{x^3}^{\cancel{2}}\cancel{y} \cdot 8\cancel{z^5}^{\cancel{5}\,4}}} = \sqrt{\frac{25y^2}{16x^2z^4}}$$

1.14 Die binomischen Formeln

Für kommende Umformungen kann es auch hilfreich sein, die **Binomische Formeln** zu kennen. Sie sind nichts weiter als die zweifache Anwendung des Distributivgesetzes und müssen daher nicht zwingend auswendig gelernt werden. Manchmal verkürzt es jedoch den Arbeitsaufwand, wenn man sie direkt anwendet.
Wenden wir uns zuerst einfachen Multiplikationen von Klammerausdrücken zu, wie zum Beispiel $3a \cdot (b + 2c)$. Mit Hilfe des Distributivgesetzte ergibt dies:

$$3a \cdot (b + 2c) = 3ab + 6ac$$

Der erste Faktor eines Terms kann jedoch selbst wieder ein Klammerausdruck sein, zum Beispiel $(a - 3) \cdot (5 + b)$. Versuchen wir nun sämtliche Klammern dieses Terms aufzulösen.

$$\begin{aligned}
(a-3)\cdot(5+b) &= (a-3)\cdot 5 + (a-3)\cdot b && \text{Distributivgesetz}\\
&= a\cdot 5 - 3\cdot 5 + a\cdot b - 3\cdot b && \text{Distributivgesetz}\\
&= 5a - 15 + ab - 3b && \text{Vereinfachung der Schreibweise}
\end{aligned}$$

Satz 1.14.1: ***Ausmultiplizieren von Klammern***
Für alle reellen Zahlen a, b, x und y gilt:

$$(a + b) \cdot (x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Beweis. Wenden Sie wie im Beispiel zweimal das Distributivgesetz an. ■

Was passiert, wenn beide Klammerausdrücke die gleichen Summanden enthalten?

$$\begin{aligned}
(a+b)\cdot(a+b) &= (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b && \text{Distributivgesetz}\\
&= a\cdot a + b\cdot a + a\cdot b + b\cdot b && \text{Distributivgesetz}\\
&= a^2 + 2ab + b^2 && \text{Vereinfachung und Zusammenfassung}
\end{aligned}$$

Dies ist bereits die erste Binomische Formel. Die zwei anderen merkenswerten Formeln lassen sich auf die gleiche Art und Weise herleiten.

Satz 1.14.2: ***Die 3 Binomischen Formeln***
Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$*:*

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *1. Binomische Formel*
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *2. Binomische Formel*
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ *3. Binomische Formel*

Beweis. Rechnen Sie die Formeln einfach nach.■

Als spaßige Anwendung berechnen wir folgende Aufgabe mit Hilfe der binomischen Formeln im Kopf:

$$1997 \cdot 2003 = (2000-3) \cdot (2000+3) = 2000^2 - 3^2 = 4000000 - 9 = 3999991$$

Beachten Sie beim Ausmultiplizieren die Vorzeichen wie es im folgenden Beispiel zu sehen ist:

Beispiel 1.14.3:

$$(a-b) \cdot (x+y) = ax + ay - bx - by, \text{ oder}$$
$$(3x-5z) \cdot (-b+3c) = -3bx + 9xc + 5bz - 15cz.$$

Bemerkung 1.14.4:

- *Nach dem Ausmultiplizieren von Klammern sollten stets gleichnamige Terme (also solche, mit gleichen Variablen) zusammengefasst werden.*
- *Sortieren Sie sich Variablen zum Beispiel in alphabetischer Reihenfolge, damit Sie den Überblick behalten.*

Beispiel 1.14.5:

$$\begin{aligned}(a+1) \cdot (4a+3) \cdot (1-a) &= (a+1) \cdot (4a+3-4a^2-3a) \\ &= (a+1) \cdot (a+3-4a^2) \\ &= a^2 + a + 3a + 3 - 4a^3 - 4a^2 \\ &= -4a^3 - 3a^2 + 4a + 3\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Umkehrung des Ausmultiplizierens, das Ausklammern. Wir suchen nach gemeinsamen Faktoren in den einzelnen Summanden einer Summe. Dazu betrachten wir folgenden Term: $ab^2x^3z + 3a^2bz$. Wir können feststellen, dass in beiden Summanden a, b und z vorkommen. Diesen gemeinsamen Faktor holen wir vor die Klammer, d. h.

$$ab^2x^3z + 3a^2bz = abz \cdot (ax^2 + 3a)$$

Wir verallgemeinern diesen Sachverhalt wie folgt:

Definition 1.14.6: ***Ausklammern eines Faktors***
Die Umformung einer Summe der Form $ax+ay$ *in die Form* $a \cdot (x+y)$ *nennt man* ***Ausklammern*** *des Faktors* a *aus der Summe.*

Der Knackpunkt beim effizienten Ausklammern ist das Auffinden des **größten gemeinsamen Teilers** aller Summanden, des sogenannten **ggT**s. Dabei kann man systematisch vorgehen und den ersten Summanden als größten gemeinsamen Teiler ansehen und ihn dann entsprechend

anpassen, wenn man die weiteren Summanden anschaut. Oder man sucht sich den kürzesten bzw. kleinsten.
Noch ein Beispiel zur Verdeutlichung:

Beispiel 1.14.7:

$$2a^2bc - 4ab^2c + 8abc^2 = 2abc \cdot (a - 2b + 4c)$$

1.15 Bruchterme

Auch in Brüchen können Buchstaben vorkommen, zum Beispiel

$$\frac{a+3b}{2a-5c}, \qquad \frac{b}{a^2-1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{a+b}{1+a^2+b^2}.$$

Diese werden zu gewöhnlichen Brüchen, sobald wir Zahlen für die Buchstaben einsetzen. Das Einzige, was beim Einsetzen beachtet werden muss, ist, dass der Nenner nicht Null wird. So darf in dem ersten Bruch nicht $a = 5$ und $c = 2$ und in dem zweiten Bruch nicht $a = 1$ oder $a = -1$ eingesetzt werden. Im dritten Bruch können für a und b alle reellen Zahlen eingesetzt werden, denn der Nenner kann nie Null werden. Warum? Wie Sie wissen, werden Quadratzahlen immer positiv und selbst wenn $a = b = 0$ so bleibt im Nenner immer noch eine 1.
In Zukunft werden wir solche Bedingungen meist nicht explizit erwähnen. Wir gehen stillschweigend davon aus, dass die Zahlenwerte der Buchstaben, wenn diese gewählt werden, außerhalb dieser verbotenen Gebiete bleiben. Das Rechnen mit Brüchen mit Buchstaben erfolgt prinzipiell auf die gleiche Weise wie das Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen.

1.16 Aufspalten oder Zusammenfassen von Bruchtermen

Das Aufspalten oder auf einen gemeinsamen Nenner von Brüchen bringen kommt häufig als Zwischenschritt beim Addieren oder Subtrahieren vor. Wir geben einige Beispiele. Zunächst ein Beispiel für die Aufspaltung:

$$\frac{a+3b}{2a-5c} = \frac{a}{2a-5c} + \frac{3b}{2a-5c}$$

Wenn wir für die Buchstaben Zahlen einsetzen, stimmt dies immer (natürlich unter der Voraussetzung, dass der Nenner nicht Null wird). Nehmen wir z.B. $a = 4, b = 3, c = 1$, so erhalten wir:

$$\frac{4+3\cdot 3}{2\cdot 4-5\cdot 1} = \frac{13}{3} = \frac{4}{2\cdot 4-5\cdot 1} + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4-5\cdot 1}.$$

Ziel ist es also in den nachfolgenden Beispielen die Brüche zunächst auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen und danach zusammenzusetzen.

Beispiel 1.16.1:

$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2}{ab} - \frac{b^2}{ab} = \frac{a^2-b^2}{ab}$

$\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} = \frac{a+1}{(a-1)(a+1)} - \frac{a-1}{(a-1)(a+1)} = \frac{2}{(a-1)(a+1)} = \frac{2}{a^2-1}$

$\frac{a+3b}{2a-5} + \frac{b}{a^2-1} = \frac{(a+3b)(a^2-1)}{(2a-5)(a^2-1)} + \frac{b(2a-5)}{(2a-5)(a^2-1)} = \frac{(a+3b)(a^2-1)+b(2a-5)}{(2a-5)(a^2-1)}$

Auch diesen Vorgang können Sie wieder mit Hilfe von Zahlenbeispielen kontrollieren. Falls gewünscht, können Sie im letzten Beispiel im Zähler und im Nenner des Ergebnisses noch die Klammern auflösen.

1.17 Vereinfachen von Brüchen

Genau wie bei den gewöhnlichen Brüchen ist es bei Brüchen mit Buchstaben ebenfalls manchmal möglich eine Vereinfachung durchzuführen, indem wir Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl teilen:

$$\frac{3a+9b^2}{6a-3} = \frac{3(a+3b^2)}{3(2a-1)} = \frac{a+3b^2}{2a-1}$$

Zähler und Nenner sind hier durch 3 geteilt worden. Auch das Teilen durch einen Buchstaben ist manchmal möglich:

$$\frac{7b}{b+2b^3} = \frac{7b}{b(1+2b^2)} = \frac{7}{1+2b^2}$$

Wir müssen hier aber, wenn wir Zähler und Nenner durch b teilen, $b \neq 0$ voraussetzen. Die linke Seite ist nämlich für $b = 0$ gar nicht definiert (da dort dann $\frac{0}{0}$ stehen würde), während die rechte Seite für $b = 0$ die Zahl 7 als Ergebnis liefert. Wenn wir ganz genau arbeiten, müssen wir daher eigentlich schreiben

$$\frac{7b}{b+2b^3} = \frac{7}{1+2b^2} \qquad \text{wenn } b \neq 0$$

Hier folgt noch ein Beispiel:

$$\frac{a^2-4}{a-2} = \frac{(a-2)(a+2)}{a-2} = a+2 \qquad \text{wenn } a \neq 2$$

Hierbei haben wir zunächst den Zähler mit Hilfe der dritten binomischen Formel in zwei Faktoren zerlegt. Hieraus konnten wir einen der beiden Faktoren kürzen, natürlich unter der Bedingung, dass dieser Faktor nicht Null ist, daher $a \neq 2$.

Im nachfolgenden Beispiel ist die Bedingung etwas komplizierter, da hier zwei Buchstaben vorkommen:

$$\frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = a-b \qquad \text{wenn } a+b \neq 0$$

Hier liefert uns die Bedingung $a + b \neq 0$ unendlich viele Paare a und b, die als linke Seite $\frac{0}{0}$ ergeben (was nicht definiert ist), die rechte Seite stellt jedoch einen normalen Zahlenwert dar. Nehmen wir z.B. $a = 1$ und $b = -1$, so ist die linke Seite $\frac{0}{0}$, aber die rechte Seite ist gleich 2. Oder wenn $a = -137$ und $b = 137$, dann ist die rechte Seite -274, während die linke Seite erneut $\frac{0}{0}$ ergibt.
Weitere Beispiele zum Vereinfachen auch bei Multiplikation und Division von Bruchtermen finden Sie in den Übungen.

1.18 Bruchterme mit Wurzeln

Auch Wurzelterme lassen sich nach ähnlichen Methoden wie die Bruchgleichungen vereinfachen. Selbstverständlich gelten auch hier die üblichen Rechengesetze zum Kürzen und Erweitern unter Berücksichtigung der Potenzgesetze. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel:

$$\frac{\sqrt{a^2b} \cdot \sqrt{c^2b^3} \cdot \sqrt{3b}}{\sqrt{3a^2}}$$

Durch Anwenden der Potenzgesetze (Aufspaltung der Wurzeln) und regelkonformes Kürzen und anschließendes teilweises Wurzelziehen erhalten wir:

$$\frac{\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c^2b^3} \cdot \sqrt{3b}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2}} = \frac{\cancel{\sqrt{a^2}}^{1} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c^2b^3} \cdot \cancel{\sqrt{3}}^{1} \cdot \sqrt{b}}{\cancel{\sqrt{3}}_{1} \cdot \cancel{\sqrt{a^2}}_{1}} = \frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c^2b^3}}{1} = b^2c\sqrt{b}$$

Manchmal besteht die Notwenigkeit, den Zähler rational zu machen. Beginnen wir mit einem einfachen Beispiel:

$$\frac{-4}{\sqrt{15}}$$

Wie gelingt es uns den Wert des Bruchs nicht zu verändern, aber dafür zu sorgen, dass im Nenner keine Wurzel mehr steht? – Wir erweitern den Bruch mit $\sqrt{15}$ und vereinfachen dann noch den Bruchterm:

$$\frac{-4}{\sqrt{15}} = \frac{-4 \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}} = \frac{-4 \cdot \sqrt{15}}{15}$$

Damit sieht zwar der Zähler wesentlich komplizierter aus, aber der Nenner ist nun rational.
Beim nächsten Beispiel funktioniert die gerade eben angewendete Vorgehensweise nicht mehr. Die Erweiterung des Bruchs mit dem Nenner führt zu folgendem Ergebnis:

$$\frac{1}{2+\sqrt{11}} = \frac{1 \cdot (2+\sqrt{11})}{(2+\sqrt{11})(2+\sqrt{11})}.$$

Nun wenden wir zur Berechnung des Nenners die erste binomische Formel an und vereinfachen den Zähler:

$$\frac{1 \cdot (2+\sqrt{11})}{(2+\sqrt{11})(2+\sqrt{11})} = \frac{2+\sqrt{11}}{4+4\sqrt{11}+11} = \frac{2+\sqrt{11}}{15+4\sqrt{11}}$$

Leider ist der Nenner immer noch nicht rational. Auch erneutes Erweitern bringt uns an dieser Stelle nicht weiter. Versuchen wir aber ein Erweiterung in der Art, dass im Nenner die dritte binomische Formel steht, so ergibt sich:

$$\frac{1}{2+\sqrt{11}} = \frac{1 \cdot (2-\sqrt{11})}{(2+\sqrt{11})(2-\sqrt{11})} = \frac{2-\sqrt{11}}{4+2\sqrt{11}-2\sqrt{11}-11} = \frac{2-\sqrt{11}}{-7} = \frac{\sqrt{11}-2}{7}$$

und der Nenner ist rational.
Diesen Trick sollten wir uns merken, wir werden ihn beim Lösen von Wurzelgleichungen erneut benötigen.

1.19 Terme mit Potenzen und/oder Logarithmen

Auch für Nicht-Bruchterme die Potenzen, respektive Wurzeln, oder Logarithmen enthalten, gelten die jeweiligen Rechengesetze, die wir in den vorherigen Kapiteln aufgeschrieben haben, wenn wir es mit Variablen zu tun haben. Hier ein noch einmal darauf hingewiesen, dass wir stillschweigend voraussetzen, dass die Variablen sich immer nur im erlaubten Bereich bewegen, also für den Ausdruck $log_a c$ der Wert von c nur positiv sein darf, kurz $c \in \mathbb{R}^+$.
Betrachten wir als Beispiel folgenden Term:

$$\log_u \sqrt[3]{\frac{u^5 v^2}{\sqrt[4]{w}}}$$

Durch Anwenden der Potenzgesetze und anschließend der Logarithmengesetze können wir diesen Term wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\log_a \sqrt[3]{\frac{u^5 v^2}{\sqrt[4]{w}}} &= \log_u \left(\frac{u^5 v^2}{w^{\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \log_u \left(u^{\frac{5}{3}} v^{\frac{2}{3}} w^{\frac{-1}{12}} \right) \\
&= \log_u \left(u^{\frac{5}{3}} \right) + \log_u \left(v^{\frac{2}{3}} \right) + \log_u \left(w^{\frac{-1}{12}} \right) \\
&= \frac{5}{3} + \frac{2}{3} \log_u v - \frac{1}{12} \log_u w
\end{aligned}$$

Kapitel 2

Algebra - Gleichungen

Bisher haben wir nur mit Rechentermen gearbeitet. Ein zentraler Aspekt der Mathematik ist die Lösung verschiedenster **Gleichungen**; seien es algebraische Gleichungen, Differentialgleichungen oder Ungleichungen. Dabei müssen dann alle Zahlen bestimmt werden, die eine oder mehrere der vorgegebenen Gleichungen oder Ungleichungen erfüllen.
Wir konzentrieren uns in den folgenden Abschnitten zuerst auf das Lösen linearer und quadratischer Gleichungen und Ungleichungen und auf das Lösen linearer Gleichungssysteme mit maximal drei Gleichungen. Außerdem werden Sie später Lösungswege für Wurzel- und Potenzgleichungen bzw. logarithmische Gleichungen kennenlernen.

2.1 Äquivalenzumformungen

Die Lösungsverfahren einer Gleichung beruhen stets darauf, dass die gegebene Gleichung oder Ungleichung so umgeformt wird, dass die Lösungsmenge direkt ablesbar ist. Bei diesen Umformungen muss die ursprüngliche Lösungsmenge erhalten bleibe, insbesondere dürfen keine Elemente verlorengehen oder hinzukommen. Diese Art der Umformung einer Gleichungen nennt man **Äquivalenzumformungen**.
Zum Beispiel folgt zwar stets aus $x = 1$, dass $x^2 = 1$, aber aus $x^2 = 1$ folgt nicht notwendigerweise, dass $x = 1$ ist (es könnte auch $x = -1$ sein). Die beiden Gleichungen

$$x = 1 \quad \text{und} \quad x^2 = 1$$

sind also nicht äquivalent zueinander und das *„Quadrieren“* somit im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung.

Es ist wichtig zu wissen, welche Umformungen wieder zu einer äquivalenten Gleichung oder Ungleichung führen. Hierbei ergeben sich einige Unterschiede zwischen Gleichungen und Ungleichungen. Seien $T_1(x), T_2(x)$ und $T(x)$ Terme, die alle im gleichen Bereich, also auf dem gleichen Intervall definiert sind. Dann gilt:

G1 Die Gültigkeit einer Gleichung oder einer Ungleichung verändert sich nicht, wenn Sie zur linken und rechten Seite den gleichen Term addieren, d. h.

$$T_1(x) = T_2(x) \Longleftrightarrow T_1(x) \pm T(x) = T_2(x) \pm T(x)$$

oder

$$T_1(x) < T_2(x) \Longleftrightarrow T_1(x) \pm T(x) < T_2(x) \pm T(x)$$

G2 Die Gültigkeit einer Gleichung verändert sich nicht, wenn Sie die linke und rechte Seite mit dem gleichen Term multiplizieren oder durch ihn dividieren, vorausgesetzt diese Zahl ist nicht gleich 0.

$$T_1(x) = T_2(x) \Longleftrightarrow T_1(x) \cdot T(x) = T_2(x) \cdot T(x), \text{ wenn } T \neq 0$$

oder

$$T_1(x) = T_2(x) \Longleftrightarrow T_1(x) : T(x) = T_2(x) : T(x), \text{ wenn } T \neq 0$$

G2U Die Gültigkeit einer Unleichung verändert sich nicht, wenn Sie die linke und rechte Seite mit dem gleichen **positiven** Term multiplizieren (oder durch ihn dividieren), also nicht gleich 0. Ist der Term negativ, dreht sich das Relationszeichen um.

$$T_1(x) < T_2(x) \Longleftrightarrow T_1(x) \cdot T(x) < T_2(x) \cdot T(x), \text{ wenn } T > 0$$

oder

$$T_1(x) < T_2(x) \Longleftrightarrow T_1(x) \cdot T(x) > T_2(x) \cdot T(x), \text{ wenn } T < 0$$

Ist die Division durch eine Term $T(x)$ nicht zu umgehen, so sind die Ergebnisse der Gleichung $T(x) = 0$ festzuhalten, die auch die ursprüngliche Gleichung erfüllen, da sie sonst verloren gehen. Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $T_1 \cdot T_2 = 0$ ergibt sich als Vereinigungsmenge der Lösungen der beiden Teilgleichungen $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$, also

G3 Ist das Produkt zweier Terme Null, so setzt sich die Lösungsmenge aus den beiden Lösungen zusammen, die sich ergeben, wenn die beiden Faktoren jeweils Null gesetzt werden, d. h.

$$T_1(x) \cdot T_2(x) = 0 \Longleftrightarrow T_1(x) = 0 \text{ oder } T_2(x) = 0$$

Damit sollte jede zu lösende Gleichung dahingehend untersucht werden, ob diese Regel anwendbar ist. Dazu sind alle Terme auf eine Seite der Gleichung zu bringen und anschließend ist eine eventuell mögliche Produktform aufzufinden.
Bei anderen Umformungen(z. B. Potenzieren, Logarithmieren) kann es sein, dass die entstehende Gleichung nicht zur ursprünglichen äquivalent ist. Es ist dann die Probe zu machen, ob die gefundene Lösung tatsächlich die Ausgangsgleichung erfüllt. Grundsätzlich werden alle Äquivalenzumformungen mit beiden Seiten durchgeführt.

2.2 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Wenden wir uns als erstes den linearen Gleichungen zu. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel, bei dem wir annehmen, dass der Wert von x die nachfolgende Gleichung erfüllt:

$$3x + 7 = -2x + 1$$

Die Aufgabe ist es nun, x zu bestimmen. Ein Lösungsweg könnte wie folgt sein:

1. Addieren Sie zur linken und rechten Seite $2x$: $5x + 7 = 1$,
2. Addieren Sie zur linken und rechten Seite -7: $5x = -6$,
3. Dividieren Sie die linke und rechte Seite durch 5: $x = -\frac{6}{5}$.

Hiermit ist in drei Schritten die unbekannte Zahl x bestimmt worden. Als Kontrolle können wir den gefundenen Wert $x = -\frac{6}{5}$ in die ursprüngliche Gleichung einsetzen und feststellen, dass die Lösung korrekt ist.
Wir können also jede lineare Gleichung durch die obigen Äquivalenzumformungen (G1) und (G2) in die allgemeine Form der folgenden Definition bringen:

Definition 2.2.1: *Eine lineare Gleichung lässt sich stets in die Form*

$$ax + b = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R}, \;\; a \neq 0,$$

überführen.

Da stets $a \neq 0$ ist, besitzt eine lineare Gleichung stets die eindeutige Lösung

$$x = -\frac{b}{a}\,.$$

Wir schreiben das auch Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{b}{a}\right\}.$$

Rechnen Sie einfach nach.

In bestimmten Fällen können wir kompliziertere Gleichungen auf lineare Gleichungen zurückführen, zum Beispiel:

$$\frac{3x+2}{4x-5} = 2$$

Nach Multiplikation der linken und rechten Seite mit $4x-5$ erhalten wir die Gleichung

$$3x + 2 = 2(4x - 5),$$

die wir mit der Methode von vorhin lösen können. Das Ergebnis ist $x = \frac{12}{5}$, wie Sie selbst nachprüfen können.
Wir haben beim ersten Schritt die Regel (G2) angewandt. Dies ist nur erlaubt, wenn die Zahl $4x-5$, mit der wir die linke und rechte Seite multipliziert haben, ungleich 0 ist. Weil x in diesem Stadium des Lösungsvorgangs noch nicht bekannt war, wussten wir hier noch nicht, ob $4x-5=0$ ist. Dies konnten wir erst prüfen, nachdem wir die neue Gleichung nach x gelöst haben. Eine solche Kontrolle danach ist nicht überflüssig, wie Sie im folgenden Beispiel feststellen können.

Beispiel 2.2.2:

$$\begin{aligned}
\frac{8x}{4x-4} &= 2 && | \cdot (4x-4) \quad \textit{für } x \neq 2 \\
8x &= 2 \cdot (4x-4) \\
8x &= 8x - 8 && | -8x \qquad x = 2 \textit{ wäre jetzt noch eine Lösung,} \\
& && \quad \textit{haben wir aber vorher ausgeschlossen} \\
0 &= -8 \qquad \textit{und das ist ein Widerspruch!}
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass diese Bruchgleichung keine Lösung hat! Wir notieren also

$$\mathbb{L} = \emptyset = \{\ \}.$$

Das Manipulieren von Ungleichungen erfordert etwas mehr Sorgfalt als das Manipulieren von Gleichungen. Doch auch hier gibt es Übereinstimmungen. Ungleichungen kommen in vier Gestalten vor:

$$a < b, \qquad a \leq b, \qquad a > b, \qquad a \geq b.$$

Ein Beispiel:

Beispiel 2.2.3:

$$\begin{aligned}
-2x + 6 &< x + 9 && | -6 \\
-2x &< x + 3 && | -x \\
-3x &< 3 && | : (-3) \\
x &> -1
\end{aligned}$$

Hier können Sie erkennen, dass die Lösung von Ungleichungen nun nicht mehr einzelnen Zahlen sind sondern Zahlenräume, sogenannte **Intervalle**. Damit schreibt man die Lösungsmenge der obigen Ungleichung auch wie folgt auf:

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x > -1\} = (-1; \infty)$$

In diesem Zusammenhang hier die Definition der Intervallschreibweise in der Mathematik:

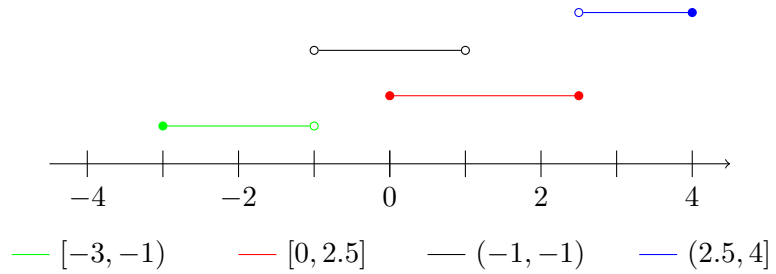
Definition 2.2.4: *Für $a, b \in \mathbb{R}$ heißt*

(a) $[a,b] := \{\ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\ \}$ *das abgeschlossene Intervall von a nach b.*

(b) $[a,b) := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b \,\}$ *das nach rechts halboffene Intervall von a nach b.*

(c) $(a,b] := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b \,\}$ *das nach links halboffene Intervall von a nach b.*

(d) $(a,b) := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}$ *das offene Intervall von a nach b.*



2.3 Quadratische Gleichungen

Definition 2.3.1: ***Quadratische Gleichungen***
Eine Gleichung die man in der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \;\; a \neq 0$$

schreiben kann, nennt man eine ***quadratische Gleichung*** *oder auch* ***Gleichungen zweiten Grades****.*

Eine solche Gleichung hat 0, 1 oder 2 Lösungen, d.h. es gibt 0, 1 oder 2 Zahlen x, die die Gleichung erfüllen. Die Lösungen werden auch oft **Wurzeln der Gleichung** genannt, obwohl in der Schreibweise der Zahlen gar keine Wurzel im Sinne des Rechnens aus Kapitel 2 vorkommen müssen. Für jeden der drei Fälle folgt ein Beispiel.

Beispiel 2.3.2:

1. *Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösungen; die linke Seite ist für jede Wahl von x größer oder gleich 1 (ein Quadrat ist immer größer oder gleich 0).*
2. *Die Gleichung $x^2 + 2x + 1 = 0$ hat eine Lösung; die linke Seite kann als $(x+1)^2$ geschrieben werden und diese ist nur gleich 0, wenn $x + 1 = 0$, d. h, wenn $x = -1$.*
3. *Die Gleichung $x^2 - 1 = 0$ hat zwei Lösungen, nämlich $x = 1$ und $x = -1$.*

In manchen Fällen ist eine spezielle Technik für die Lösung von quadratischen Gleichungen erforderlich. Als Beispiel nehmen wir $x^2 - 3x = 0$.
Wenn wir diese Gleichung schreiben als $x(x-3) = 0$ und bemerken, dass das Produkt zweier Zahlen 0 sein muss, sehen wir, dass entweder der erste Faktor $x = 0$ oder der zweite Faktor $x - 3 = 0$ sein muss. Die Lösungen sind deshalb $x = 0$ und $x = 3$. Was wir gerade benutzt haben, können wir auch als eine allgemeine Eigenschaft von Zahlen formulieren, eine Eigenschaft, die wir noch oft anwenden werden:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0$$

Hierbei müssen Sie das „oder“ so auffassen, dass a und b auch beide 0 sein können. Wenn nämlich mindestens eine der Zahlen a oder b gleich Null ist, ist auch $a \cdot b$ gleich Null. Wenn sowohl a als auch b ungleich Null sind, ist ihr Produkt ebenfalls ungleich Null.

Nun kommen wir zum Verfahren der **quadratischen Ergänzung**. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel:

$$x^2 - 6x + 3 = 0$$

Um sie zu lösen, schreiben wir sie folgendermaßen um:

$$x^2 - 6x + 9 = 6$$

Auf der linken Seite erkennen wir die zweite binomische Formel und können sie also als Quadrat von $x - 3$ schreiben. Das Lösen der Gleichung, die wir auf diese Weise erhalten, ist einfach:

$$(x - 3)^2 = 6$$

so dass nach dem beidseitigen Wurzelziehen

$$x - 3 = \sqrt{6} \qquad \text{oder} \qquad x - 3 = -\sqrt{6}$$

als Lösung entsteht. Die beiden Lösungen sind deshalb

$$x = 3 + \sqrt{6} \qquad \text{und} \qquad x = 3 - \sqrt{6},$$

oder kurz

$$x = 3 \pm \sqrt{6} \qquad \text{oder} \qquad \mathbf{L} = \{3 \pm \sqrt{6}\}.$$

Diese Methode können wir am einfachsten anwenden, wenn der Koeffizient von x^2 gleich 1 ist. Dies können wir aber immer erreichen, indem wir die ganze Gleichung durch den Koeffizienten von x^2 teilen. Dann nehmen wir die Hälfte des Koeffizienten von x und quadrieren dieses um damit auf der linken Seite ein vollständiges Quadrat zu bilden und auf der rechten Seiten eine Konstante, d.h. eine Zahl, welche nicht von x abhängt. Ist diese Konstante positiv oder Null, so können wir die Quadratwurzel hieraus ziehen und damit die Gleichung lösen. Ist die Konstante negativ, so gibt es keine Lösungen, denn die linke Seite ist ein Quadrat und somit nicht negativ. Wir geben noch ein Beispiel an:

$$x^2 + 10x + 20 = 0$$

Wir schreiben die Gleichung also folgendermaßen um:

$$x^2 + 10x + 25 = 5$$

oder

$$(x + 5)^2 = 5,$$

so dass

$$x + 5 = \sqrt{5} \qquad \text{oder} \qquad x + 5 = -\sqrt{5}$$

Die Lösungen sind deshalb

$$x = -5 + \sqrt{5} \qquad \text{und} \qquad x = -5 - \sqrt{5}$$

oder

$$x = -5 \pm \sqrt{5} \qquad \text{oder} \qquad \mathbb{L} = \{-5 \pm \sqrt{5}\}$$

Betrachten wir nun wieder die allgemeinste Form der quadratischen Gleichungen und führen die bereits oben gemachten Umformungen durch.

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{mit } a \neq 0$$

Division durch a führt zu

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Jetzt ergibt die quadratische Ergänzung

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

und Subtraktion von $\frac{c}{a}$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

oder

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}.$$

Jetzt können wir die Wurzel ziehen, falls $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \geq 0$, also

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \qquad \text{und} \qquad x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

also

$$x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \qquad \text{und} \qquad x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

oder kurz

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

Definition 2.3.3: ***Diskriminate***
Den Ausdruck unter der Wurzel der obigen Rechnung nennt man Diskriminante.

$$\mathcal{D} := \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

heißt „Diskriminante“ der Gleichung.

Beispiel 2.3.4:

- $3x^2 - 4 = 6x - x^2 \iff 4x^2 - 6x - 4 = 0$; *Diskriminante* $\mathcal{D} = \left(\frac{-6}{8}\right)^2 - \frac{-4}{4} = \frac{25}{16}$.
- $x^2 + 4x = 0$; *Diskriminante* $\mathcal{D} = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$.
- $6x^2 - 8x + 4 = 3x - 5 \iff 6x^2 - 11x + 9 = 0$ *Diskriminante* $\mathcal{D} = \left(-\frac{11}{12}\right)^2 - \frac{9}{6} = \frac{95}{144}$.

Die Diskriminante erlaubt uns eine schnelle Analyse quadratischer Gleichungen, da sie Auskunft über die Anzahl und Art ihrer Lösungen gibt.

Satz 2.3.5: *Eine quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \textit{für } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

besitzt

(a) *keine Lösung, falls* $\mathcal{D} < 0$ *ist.*

(b) *genau eine Lösung, falls* $\mathcal{D} = 0$ *ist.*

(c) *genau zwei Lösungen, falls* $\mathcal{D} > 0$ *ist.*

Ist die Gleichung lösbar, so sind die Lösungen durch die sogenannte „abc-Formel“

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}\,.$$

gegeben.

Beweis. Dass die Diskrimnante tatsächlich die Lösungsmenge bestimmt, haben wir an obiger Rechnung bereits erkannt, sie ist der Ausdruck unter der Wurzel. Ist $\mathcal{D} < 0$, so können wir nicht die Wuruzel ziehen und somit gibt es keine Lösung.
Gehen wir davon aus, dass $\mathcal{D} \geq 0$ ist, können wir die Wurzel ziehen und erhalten nun mindestens eine Lösung. Zwei verschiedene Lösungen erhalten wir, wenn die $\mathcal{D} > 0$ ist, im Falle der Gleichheit fallen die beiden Ausdrücke zusammen und wir erhalten $x = -\frac{b}{2a}$ als Lösung. ■

Bemerkung 2.3.6: *Man kann die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ auch zunächst in die Form $x^2 + px + q = 0$ transformieren und dann die „p-q-Formel“*

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

anwenden. Für die Diskriminante erhalten wir in dieser Form

$$\mathcal{D} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\,.$$

Beispiel 2.3.7:

- *Gesucht wird die Lösungsmenge der Gleichung*

  $$x^2 - 2x = 6 - 3x\,.$$

  Nun gilt

  $$x^2 - 2x = 6 - 3x \iff x^2 + x - 6 = 0$$

  und wir erhalten für die Diskriminante

  $$\mathcal{D} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-6) = \frac{25}{4} > 0\,.$$

  Folglich gibt es zwei Lösungen und diese sind gegeben durch

  $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}\,.$$

  Die Lösungsmenge ist also

  $$\mathbb{L} = \{-3, 2\}\,.$$

- *Als Lösung der Gleichung*

  $$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$$

  erhalten wir wegen

  $$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0 &\iff x^2 - 4x + 4 = 0\\ &\iff (x-2)^2 = 0 \iff |x-2| = 0 \iff x = 2\end{aligned}$$

  die Menge

  $$\mathbb{L} = \{2\}\,.$$

2.4 Kubische Gleichungen

Definition 2.4.1: *Gleichungen, die man in die Form*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \;\; a \neq 0$$

überführen kann, nennt man kubische Gleichungen.

Auch für diese Gleichungen gibt es eine geschlossene Lösungsformel, die sogenannte *„Cardansche Formel“*, die allerdings bei Weitem nicht so intuitiv und einfach zu benutzen ist, wie die *„p-q-Formel“*. In vielen Fällen kann man die Lösungen allerdings auch durch Reduktion der Gleichung mit *„Polynomdivision“* bestimmen.

> ***Merke:*** *Ist $p(x)$ ein „Polynom“ vom Grad $n \geq 1$ in der Unbekannten x, d. h. ein Ausdruck der Form*
>
> $$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \,.$$
>
> *und $p(\lambda) = 0$, so gibt es ein Polynom $q(x)$ vom Grad $n-1$ mit*
>
> $$p(x) = (x - \lambda) \cdot q(x) \,.$$

Ist also eine Lösung $\lambda \in \mathbb{R}$ der Gleichung bekannt, so erhält man die übrigen Lösungen, indem man das Polynom $ax^3 + bx^2 + cx + d$ durch $(x - \lambda)$ dividiert und anschließend die Nullstellen des entstehenden Polynoms bestimmt.

Beispiel 2.4.2: *Die Lösungen der Gleichung*

$$x^3 + 2x^2 = 5x + 6$$

erhält man nun, indem man zunächst eine Lösung der Gleichung „rät“ *und anschließend eine Polynomdivision*[1] *durchführt. Wegen*

$$x^3 + 2x^2 = 5x + 6 \iff x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

und

$$2^3 + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 6 = 0$$

ist $x_1 = 2$ eine Lösung. Für die weiteren Lösungen müssen wir nun $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ auf das Polynom $q(x)$ reduzieren. Dazu nutzen wir die Bemerkung und folgern

$$q(x) = p(x) : (x - \lambda) \,.$$

Nun gilt

$$\begin{array}{rl} \big(\quad x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \big) : \big(x - 2 \big) = x^2 + 4x + 3 \\ \underline{-\,x^3 + 2x^2} \\ \qquad\quad 4x^2 - 5x \\ \qquad\quad \underline{-\,4x^2 + 8x} \\ \qquad\qquad\quad 3x - 6 \\ \qquad\qquad\quad \underline{-\,3x + 6} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

[1] Zur Erinnerung: Bei der schriftlichen Division von Zahlen dividiert man schrittweise von links nach rechts, multipliziert die aktuelle Ziffer zurück und zieht das Ergebnis von dem, was man noch hat, ab. Die Polynomdivision funktioniert ähnlich: Man richtet sich danach wie oft die höchste x-Potenz in den (verbliebenen) Ausdruck passt.

und daher

$$0 = p(x) \iff x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0 \iff (x-2) \cdot (x^2 + 4x + 3) = 0\,.$$

Also erhalten wir die übrigen Lösungen durch Lösung der Gleichung

$$x^2 + 4x + 3 = 0\,.$$

Mit der „p-q-Formel“ folgt

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \iff x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \iff x_2 = -3 \ \vee \ x_3 = -1\,,$$

sodass

$$\mathbb{L} = \{-3, -1, 2\}\,.$$

Die entscheidende Frage bei der Lösung kubischer Gleichungen scheint also die Frage nach der ersten Lösung zu sein. Gibt es einen Trick, wie man besonders einfach bzw. besonders schnell eine Lösung der Gleichung errät? Die Antwort ist: Ja, den gibt es!

Bemerkung 2.4.3: *Ist*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

eine kubische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, d. h. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$, die eine ganzzahlige Lösung λ besitzt, so ist λ ein Teiler von d.

Somit sind die ganzzahligen Teiler des Absolutgliedes die einzigen Kandidaten für ganzzahlige Lösungen einer kubischen Gleichung.

2.5 Gleichungen höherer Ordnung

Bei Gleichungen höherer Ordnung, also Gleichungen der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad \text{mit} \qquad n \in \mathbb{N}, n \geq 4, a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$$

nutzt man zur Lösung eine Mischung der bereits vorgestellten Methoden.

Beispiel 2.5.1: *Gesucht sind die Lösungen der Gleichung*

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0\,.$$

Identifizieren wir

$$z := x^2\,,$$

wird die Gleichung vierten Grades mittels Substitution zu einer quadratischen Gleichung

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \overset{z=x^2}{\iff} z^2 - 7z + 12 = 0\,.$$

Mit der p-q-Formel folgt

$$z^2 - 7z + 12 = 0 \iff z = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \iff z_1 = 3 \ \vee \ z_2 = 4\,.$$

Wegen

$$x^2 = z \iff |x| = \sqrt{z} \iff x_1 = -\sqrt{z} \ \vee \ x_2 = \sqrt{z}$$

erhalten wir dann für die eigentliche Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ -2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2 \right\}.$$

Beispiel 2.5.2: *Zur Lösung der Gleichung*

$$x^4 - 9x^2 - 4x + 12 = 0$$

bestimmen wir zunächst die ganzzahligen Teiler des Absolutgliedes. Diese sind

$$\{-12, 12, -6, 6, -4, 4, -3, 3, -2, 2, -1, 1\}.$$

Setzen wir die eins ein, so folgt

$$1^4 - 9 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 12 = 0$$

und damit ist $x_1 = 1$ eine Lösung dieser Gleichung. Polynomdivision durch $(x-1)$ liefert

$$\begin{array}{rl}
\big(\quad x^4 & -9x^2 \;-4x+12\big) : \big(x-1\big) = x^3 + x^2 - 8x - 12 \\
\underline{-x^4 + x^3} & \\
x^3 & -9x^2 \\
\underline{-x^3 \;+x^2} & \\
-8x^2 & -4x \\
\underline{8x^2 \;-8x} & \\
-12x & +12 \\
\underline{12x - 12} & \\
0 &
\end{array}$$

also ein Polynom dritten Grades. Die übrigen Lösungen erhalten wir nun also durch Lösen der Gleichung

$$x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0.$$

Wegen

$$(-2)^3 + (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 12 = -8 + 4 + 16 - 12 = 0,$$

ist auch $x_2 = -2$ eine Lösung der Gleichung und wir erhalten durch erneute Polynomdivision

$$(x^3 + x^2 - 8x - 12) : (x + 2) = x^2 - x - 6,$$

ein Polynom zweiten Grades, dessen Nullstellen wir mit der „p-q-Formel“ bestimmen:

$$x_{3/4} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \iff x_3 = 3 \;\vee\; x_4 = -2.$$

Die Lösungsmenge der Gleichung $x^4 - 9x^2 - 4x + 12 = 0$ ist daher

$$\mathbb{L} = \{-2, 1, 3.\}$$

> ***Merke:*** *Eine algebraische Gleichung der Form*
>
> $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$
>
> *mit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ und $a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ besitzt höchstens n Lösungen.*

2.6 Betragsgleichungen

Gleichungen in denen die *„Betragsfunktion“*

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0\,, \\ -x & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$$

auftritt, heißen *„Betragsgleichungen“*. Zur Lösung dieser Gleichungen muss man den Betrag durch eine *„Fallunterscheidung“* auflösen.

Beispiel 2.6.1: *Wir suchen die Lösungen der Gleichung*

$$|x+3| + |x-1| = 4\,.$$

Da die beiden Beträge jeweils bei $x = -3$ und $x = 1$ „umschalten“ müssen wir die Fälle

$$(1)\ x < -3, \qquad (2)\ -3 \leq x < 1, \qquad (3)\ x \geq 1$$

untersuchen.

Zu (1): Für $x < -3$ sind

$$x + 3 < 0 \quad \textit{und} \quad x - 1 < 0,$$

und daher

$$\begin{aligned} & |x+3| + |x-1| = 4 \\ \iff\ & -(x+3) - (x-1) = 4 \\ \iff\ & -2x - 2 = 4 \qquad | \ +2 \\ \iff\ & -2x = 6 \qquad | \ :(-2) \\ \iff\ & x = -3\,. \end{aligned}$$

Da wir aber vorausgesetzt hatten, dass $x < -3$ ist, gilt somit für diesen Fall

$$\mathbb{L}_1 = \emptyset\,.$$

Zu (2): Für $-3 \leq x < 1$ sind

$$x + 3 \geq 0 \quad \textit{und} \quad x - 1 < 0,$$

und daher

$$\begin{aligned} & |x+3| + |x-1| = 4 \\ \iff\ & x + 3 - (x-1) = 4 \\ \iff\ & 4 = 4 \end{aligned}$$

Da diese Aussage offensichtlich wahr ist, ist die Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, die unsere Voraussetzung erfüllen. Also gilt

$$\mathbb{L}_2 = \big\{\, x \in \mathbb{R} : -3 \leq x < 1 \big\} = [-3, 1)\,.$$

Zu (3): Für $x \geq 1$ sind

$$x + 3 > 0 \quad \textit{und} \quad x - 1 \geq 0,$$

und daher

$$|x+3| + |x-1| = 4$$

$$
\begin{aligned}
&\iff && x+3+x-1=4 && \\
&\iff && 2x+2=4 && \mid -2 \\
&\iff && 2x=2 && \mid :(2) \\
&\iff && x=1\,. &&
\end{aligned}
$$

Nachdem wir aber vorausgesetzt hatten, dass $x \geq 1$ ist, gilt somit für diesen Fall

$$\mathbb{L}_3 = \{1\}\,.$$

Insgesamt besitzt die Gleichung also die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = [-3,1) \cup \{1\} = [-3,1]\,.$$

Lösungsverfahren für Betragsgleichungen

1. Die reellen Zahlen werden in Intervalle zerlegt, deren Grenzen die Stellen sind, an denen einer der in der Gleichung vorkommenden Betragsausdrücke das Vorzeichen wechselt.
2. Für jedes Intervall werden die Beträge aufgelöst und die entstandene Gleichung gelöst.
3. Für die berechneten Lösungen wird geprüft, ob sie in dem gerade betrachteten Intervall liegen. Ist dies der Fall, dann ist der Wert eine Lösung der Betragsgleichung. Andernfalls ist er keine Lösung.
4. Die Lösungsmenge der Betragsgleichung ergibt sich als Vereinigung der Lösungsmengen in den einzelnen Intervallen.

2.7 Bruchgleichungen

Eine Bruchgleichung ist eine Gleichung, in der die Unbekannte im Nenner eines Bruchs vorkommt. Die folgenden Gleichungen sind Bruchgleichungen:

$$\frac{1}{x-1} = 5, \qquad \frac{t}{t^2-2t+5} = \frac{2}{t-3}, \qquad \frac{1}{z} + 2 = \frac{z-1}{z+1}.$$

Zu Beginn dieses Kapitels wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Multiplikation einer Gleichung mit Termen evtl. keine Äquivalenzumformung darstellt (analoges gilt für die Division). Dies ist dann der Fall, wenn der verwendete Term nach Einsetzen eines Elements der Definitionsmenge Null ergibt. Diese Beobachtung ist insbesondere bei Bruchgleichungen relevant, weswegen in diesen Fällen die Bestimmung der Definitionsmenge von zentraler Bedeutung ist.

Beispiel 2.7.1: *Würde die Gleichung $\frac{x-2}{x^2-4} = 0$ mit x^2-4 multipliziert, so ergäbe sich*

$$
\begin{aligned}
&&& \frac{x-2}{x^2-4} = 0 && \mid \cdot (x^2-4) \\
&\iff && x-2=0 && \mid +2 \\
&\iff && x=2. &&
\end{aligned}
$$

Wird dieser Wert jedoch in die linke Seite der Ausgangsgleichung $\frac{x-2}{x^2-4} = 0$ eingesetzt, resultiert eine unerlaubte Division durch Null: $\frac{2-2}{2^2-4} = \frac{0}{0}$.
Betrachten wir den Term x^2-4 näher. Er ist für $x=2$ oder $x=-2$ offensichtlich Null, d.h. die Definitionsmenge der Gleichung ist $\mathrm{D} = \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$. Da eine Multiplikation mit Null keine Äquivalenzumformung ist, darf die Gleichung mit dem Term x^2-4 nur multipliziert werden, wenn die Werte $x=2$ und $x=-2$ ausgeschlossen werden. Unter dieser Einschränkung ergibt sich wie oben die Gleichung $x-2=0$ bzw. $x=2$. Da dieser Wert als Lösung jedoch ausgeschlossen wurde, ist die Lösungsmenge der Gleichung leer.

Das Beispiel zeigt, wie das Verfahren zur Lösung von Bruchgleichungen verbessert werden kann.
Lösungsweg bei Bruchgleichungen

1. Zunächst wird der Definitionsbereich D der Gleichung bestimmt, d.h. die Betrachtung wird auf diejenigen Werte für x eingeschränkt, für die die Gleichung sinnvoll erklärt ist (d.h. keiner der Nenner nimmt den Wert Null an).
2. Vor jeder Multiplikation/Division mit einem Term ist zu klären, für welche Werte von x eine Multiplikation mit Null bzw. Division durch Null vorliegt. Diese Werte sind mit den Elementen der ermittelten Lösungsmenge zu vergleichen.
3. Alternativ kann nach Lösung der Gleichung mittels Einsetzen der berechneten Werte geprüft werden, ob sie (zulässige) Lösungen sind.

Wird diese Vorgehensweise beachtet, ergibt sich auch für die obige Gleichung die richtige Antwort: Die Lösungsmenge ist leer.

Beispiel 2.7.2: *Die Gleichung*

$$\frac{x-2}{x+1}+\frac{x}{x-1}=1+\frac{2x}{x^2-1}$$

wird auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt. Da der Nenner $x^2-1=(x-1)(x+1)$ *für* $x=1$ *bzw.* $x=-1$ *Null wird und die beiden anderen Nennerterme für keine weiteren Werte Null ergeben, ist* $\mathrm{D}=\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ *der Definitionsbereich der Gleichung. Da* $(x-1)(x+1)=x^2-1$ *gilt, ist* x^2-1 *der Hauptnenner aller Brüche, so dass die betrachtete Gleichung*

$$\frac{x-2}{x+1}+\frac{x}{x-1}=1+\frac{2x}{x^2-1}$$

äquivalent zu

$$\frac{(x-2)(x-1)}{x^2-1}+\frac{x(x+1)}{x^2-1}=1+\frac{2x}{x^2-1}$$

Multiplikation beider Seiten mit x^2-1 *ergibt:*

$$\begin{aligned}
& (x-2)(x-1)+x(x+1) && =(x^2-1)+2x && \\
\iff\quad & x^2-3x+2+x^2+x && =x^2-1+2x && \mid -x^2+1-2x \\
\iff\quad & x^2-4x+3 && && =0
\end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung $x^2-x+3=0$ *kann jetzt mit der pq-Formel gelöst werden.*

$$\begin{aligned}
& x^2-4x+3=0 \\
\iff\quad & x_{1,2}=-\frac{-4}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2-3} \\
& =2\pm\sqrt{4-3} \\
& =2\pm 1 \\
\Rightarrow\quad & x_1=3 \quad \textit{und} \quad x_2=1
\end{aligned}$$

Da $x_2=1$ *nicht im Definitionsbereich der ursprünglichen Gleichung liegt, enthält deren Lösungsmenge nur den Wert* $x_1=3$, *d.h.* $\mathbb{L}=\{3\}$.

2.8 Wurzelgleichungen

Gleichungen in denen die Unbekannte unter einer Wurzel steht nennt man **Wurzelgleichungen**. Bei der Lösung dieser Gleichungen muss man beachten, dass das *„Quadrieren“* keine Äquivalenzumformung ist und sich daher die Lösungsmenge verändert. Abschließend ist also eine Probe nötig um zu überprüfen, ob die gefundenen Lösungen tatsächlich auch Lösungen sind.

Beispiel 2.8.1: *Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung*

$$\sqrt{2x+6}+1=x\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2x+6}+1=x && \mid -1\\
\iff\quad &\sqrt{2x+6}=x-1 && \mid (\ )^2\\
\implies\quad &2x+6=(x-1)^2 &&\\
\iff\quad &2x+6=x^2-2x+1 && \mid -2x-6\\
\iff\quad &x^2-4x-5=0 && \mid \textit{p-q-Formel}\\
\iff\quad &x_{1,2}=\frac{4}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2+5} &&\\
\iff\quad &x_{1,2}=2\pm\sqrt{9} &&\\
\iff\quad &x_1=-1\ \wedge\ x_2=5 &&
\end{aligned}$$

Eine Probe ergibt:

$$\sqrt{2\cdot -1+6}+1=\sqrt{4}+1=3\neq -1 \quad\implies\quad x_1=-1 \textit{ ist keine Lösung,}$$

$$\sqrt{2\cdot 5+6}+1=\sqrt{16}+1=5 \quad\implies\quad x_2=5 \textit{ ist eine Lösung.}$$

Also gilt

$$\mathbb{L}=\{5\}\,.$$

Lösungsverfahren für Wurzelgleichungen:

1. Man lege den Definitionsbereich der Gleichung fest (u.a. sind die Werte auszuschließen, für die unter einer Wurzel stehende Terme negativ werden).
2. Beide Seiten der Gleichung werden quadriert bis alle Wurzelterme eliminiert sind. Dabei müssen die Ausdrücke nach dem Quadrieren ggf. mit elementaren Umformungen bearbeitet werden. Zum Ziel führt die Strategie, nach jedem Quadrieren einen evtl. noch vorhandenen Wurzelterm auf eine Seite und alle restlichen Terme auf die andere Seite zu bringen und erst dann die Gleichung erneut zu quadrieren.
3. Nachdem alle Wurzelterme auf diese Weise eliminiert worden sind, wird die resultierende Gleichung gelöst.
4. Mittels einer Probe wird geprüft, ob die ermittelten Lösungen auch Lösungen der Ausgangsgleichung sind.

2.9 Logarithmische Gleichungen

Gleichungen, in denen die Unbekannte als Argument des Logarithmus vorkommt, heißen **logarithmische Gleichungen**. Zur Entwicklung eines Lösungsansatzes wird zunächst die Gleichung

$$\log_{10}(x-2)=1$$

untersucht. Vor ihrer Lösung ist zu beachten, dass der Logarithmus nur für positive Argumente erklärt ist. Das bedeutet in diesem Beispiel, dass der Term $x-2$ nur Werte annehmen darf, die positiv sind. Der Definitionsbereich der Gleichung ist somit das Intervall $\mathrm{D} = (2, \infty)$.
Zur Lösung der Gleichung bietet sich folgende Regel für Logarithmen an

$$\log_a(x) = \log_a(y) \Longleftrightarrow x = y,$$

die für alle positiven x, y und alle $a > 0$ mit $a = 1$ gilt. An dieser Stelle sei außerdem an die Darstellung $b = \log_a(a^b)$ einer Zahl b als Logarithmus zur Basis a erinnert.
Mit diesen Hilfsmitteln läßt sich obige Gleichung nun wie folgt lösen:

$$\begin{aligned}
& \log_{10}(x-2) = 1 && |1 = \log_{10}(10^1) \\
\Longleftrightarrow\quad & \log_{10}(x-2) = \log_{10}(10^1) && | \text{ Regeln für log} \\
\Longrightarrow\quad & x - 2 = 10^1 && | +2 \\
\Longleftrightarrow\quad & x = 12 &&
\end{aligned}$$

Der zweite Lösungsschritt ist i.Allg. keine Äquivalenzumformung, da der Logarithmus nur für positive Argumente angewendet werden darf. Daher ist nach Bestimmung aller möglichen Lösungen eine Überprüfung dieser Werte durch eine Probe in der Ursprungsgleichung bzw. durch einen Vergleich mit der Definitionsmenge notwendig. Wegen $12 \in \mathrm{D} = (2; \infty)$ ist $\mathbb{L} = \{12\}$ die Lösungsmenge.

Eine weitere Lösungsstrategie kann sein, eine Exponentialgleichung zu verwenden, denn es gilt:

$$a^x = a^y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y$$

mit $a > 0, a \neq 1$. Daher kann die Lösung der Gleichung auch so ausgeführt werden, dass auf beiden Seiten der Gleichung die Potenz zur Basis $a = 10$ gebildet wird:

$$\begin{aligned}
& \log_{10}(x-2) = 1 && | \text{ Potenzbildung mit Basis 10} \\
\Longleftrightarrow\quad & 10^{\log_{10}(x-2)} = 10^1 && | \text{ Regeln für Potenzen} \\
\Longrightarrow\quad & x - 2 = 10 && | +2 \\
\Longleftrightarrow\quad & x = 12 &&
\end{aligned}$$

Umformungen von logarithmischen Gleichungen
Sei $a > 0$ mit $a = 1$. Alle Lösungen der logarithmischen Gleichung $log_a(f(x)) = b$ sind Lösungen der Gleichung $f(x) = a^b$. Da die Gleichung $f(x) = a^b$ weitere Lösungen haben kann, muss nach Berechnung dieser Lösungen stets eine Probe in der logarithmischen Gleichung bzw. ein Vergleich mit der Definitionsmenge durchgeführt werden.

2.10 Exponentialgleichungen

Gleichungen, in denen die Unbekannte im Exponenten einer Potenz vorkommt, heißen Exponentialgleichungen. Die folgende Gleichungen sind Exponentialgleichungen:

$$3^{x-1} = 10, \qquad e^{t^2+4} = 4, \qquad 10^{-4u+3} = -2.$$

Das Lösungsverfahren beruht auf der Rechenregel ($a > 0, a \neq 1$):

$$a^x = a^y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y$$

und der Tatsache, dass jede positive Zahl c als Potenz dargestellt werden kann, d.h.

$$c = a^{\log_a(c)} = a^{\frac{\ln(c)}{\ln(a)}}.$$

Ein einfaches Beispiel:

$$2^x = 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2^x = 2^{\log_2(2)}$$

Wegen $\log_2(2) = 1$ gilt dann $x = 1$ und ist somit die einzige Lösung.

Betrachten wir nun die erste der obigen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
3^{x-1} &= 10 && \mid \text{Potenzbildung mit Basis 3} \\
\Longleftrightarrow \quad 3^{x-1} &= 3^{\log_3(10)} && \mid \text{Regeln für Potenzen} \\
\Longrightarrow \quad x - 1 &= \log_3(10) && \mid +1 \\
\Longrightarrow \quad x &= \log_3(10) + 1 && \mid \text{Logarithmusgesetze} \\
\Longrightarrow \quad x &= \log_3(10) + \log_3(3) && \mid \text{Logarithmusgesetze} \\
\Longleftrightarrow \quad x &= \log_3(30)
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann auch direkt durch Logarithmieren beider Seiten der Gleichung ermittelt werden. Dabei wird die Basis des Logarithmus passend zur Basis der Potenz gewählt. Hier ist zu beachten, dass der Logarithmus nur für positive Werte definiert ist. Da 10 und die Potenz 3^{x-1} positiv sind, gilt

$$\begin{aligned}
3^{x-1} &= 10 && \mid \text{Logarithmieren zur Bais 3} \\
\Longleftrightarrow \quad \log_3(3^{x-1}) &= \log_3(10) && \mid \text{Logarithmusgesetze} \\
\Longrightarrow \quad x - 1 &= \log_3(10) && \mid +1 \\
\Longrightarrow \quad x &= \log_3(10) + 1 && \mid \text{Logarithmusgesetze} \\
\Longrightarrow \quad x &= \log_3(10) + \log_3(3) && \mid \text{Logarithmusgesetze} \\
\Longleftrightarrow \quad x &= \log_3(30)
\end{aligned}$$

Da es sich in dieser Situation um Äquivalenzumformungen handelt, ist $\mathbb{L} = \{\log_3(30)\}$ Lösungsmenge der Gleichung.

Lösungen von Exponentialgleichungen
Sei $a^{f(x)} = b$ eine Exponentialgleichung mit $a > 0, a \neq 1, b \in \mathbb{R}$. Dann hat die Gleichung

1. die selben Lösungen wie die Gleichung $f(x) = \log_a(b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)}$ falls $b > 0$ ist.
2. keine Lösung, falls $b \leq 0$ ist.

2.11 Lineare Gleichungssysteme

In den vorherigen Kapiteln haben wir uns mit Gleichungen mit ausschließlich einer Unbekannten beschäftigt. Nun betrachten Gleichungen mit mehreren Variablen. Allerdings schränken wir die Arten von Gleichungen ein, wir betrachten nur lineare Gleichungen, das heißt $\sqrt{x}$ oder 3^x aber auch x^4 werden wir in diesem Kapitel nicht wiederfinden.
Außerordentlich viele technische und ökonomische Problemstellungen führen bei ihrer Lösung auf derartige lineare Gleichungssysteme. Daher als erstes eine Definition:

Definition 2.11.1: ***Lineares Gleichungssystem***
Ein System linearer Gleichungen (d. h. potenzenfreier Gleichungen) der Art

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m &= b_n \end{aligned}$$

heißt ***lineares Gleichungssystem*** *(kurz* ***LGS****) aus n Gleichungen (auch Zeilen) mit je m Unbekannten $x_1, \ldots, x_m$. Die Zahlen $a_{i,j} \in \mathbb{R} (i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$ heißen* ***Koeffizienten*** *des Gleichungssystems. Alle übereinanderstehenden, d.h. zur gleichen Unbekannten gehörenden Koeffizienten, nennen wir auch — je nach Unbekannter x_j —* ***j-te Spalte****. Die Zahlen $a_{1,2}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,2}$ wären also beispielsweise hier die zweite Spalte. Die Zahlen $b_1, \ldots, b_n$ heißen zusammen* ***rechte Seite*** *des linearen Gleichungssystems.*

Beispiel 2.11.2: *Das folgende LGS besteht aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Es gilt also $n = m = 3$.*

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 - 4x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Koeffizienten, welche gleich 0 sind, sorgen dafür, dass in der entsprechenden Zeile diese Variable vollständig entfällt. Wenn Koeffizienten gleich 1 sind, ist es nicht notwendig diese auszuschreiben. Natürlich wird ein LGS nicht immer so ordentlich wie oben auf dem Silbertablett präsentiert werden. Oft müssen Unbekannte zusammengefasst und in der Reihenfolge sortiert werden, um die allgemeine Form aus obiger Definition zu erhalten. Prinzipiell ist das aber immer möglich.

Definition 2.11.3: *Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen (= Anzahl der Zeilen) und m Unbekannten (= Anzahl der Spalten) heißt*

- ***überbestimmt****, falls $n > m$ gilt,*
- ***unterbestimmt****, falls $n < m$ gilt.*

Die Definition richtet sich also danach, ob das LGS mehr Gleichungen als Unbekannte hat oder umgekehrt.

Definition 2.11.4: ***Lösungsmenge***
Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ eines linearen Gleichungssystems ist die Menge aller m-Tupel $(x_1, \ldots x_m) \in \mathbb{R}^m$, für welche das lineare Gleichungssystem eine wahre Aussage liefert. Dabei müssen natürlich alle Gleichungen, d.h. alle Zeilen des Systems, gleichzeitig erfüllt sein.

Bemerkung 2.11.5: *Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ eines linearen Gleichungssystems können folgende Situationen eintreten:*

- *Das LGS hat keine Lösung, d.h.* $\mathbb{L} = \emptyset = \{\ \}$.
- *Das LGS hat genau eine Lösung.*
- *Das LGS hat unendlich viele Lösungen.*

Es gibt verschiedene Lösungsstrategien zum Lösen solcher LGS. Aus der Schule sind sie vielleicht unter den Namen Einsetzungs-, Gleichsetzungs- und Additionsverfahren bekannt. Sie führen alle auf das gleiche Ergebnis und werden am besten je nach Ausgangslage angewandt.
Betrachten wir zunächst LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten.

Das **Einsetzungsverfahren** kann man gut dann verwenden, wenn nur eine Gleichung bereits nach einer Variablen aufgelöst ist,

$$\begin{aligned} (I) \quad & 4x+3y \quad = 64 \\ (II) \quad & x \ = -\frac{4}{3}y+23 \end{aligned}$$

Jetzt (II) in (I) einsetzen, so ergibt sich:

$$\Longrightarrow \quad 4 \cdot (-\frac{4}{3}y + 23) + 3y = 64$$

und nach weiteren Rechnungen

$$\Longrightarrow \quad y = 12$$

Nun y in (I) einsetzen (Rücksubstitution), dann ergibt sich

$$\Longrightarrow \quad x = -\frac{4}{3} \cdot 12 + 23 = 7$$

Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L} = \{(7; 12)\}$.

Das **Gleichsetzungsverfahren** eignet sich besonders dann gut zum Lösen eines LGS, wenn beide Gleichungen bereits nach einer Variablen aufgelöst sind. Sie kennen dieses Lösungsverfahren wahrscheinlich zum Lösen eines Schnittpunktproblems (zum Beispiel wenn sich zwei Geraden schneiden). Aus

$$\begin{aligned} (I) \quad & y = 2x - 5 \\ (II) \quad & y = \frac{1}{3}x + 5 \end{aligned}$$

ergibt sich durch Gleichsetzen $(I) = (II)$

$$\begin{aligned} 2x - 5 = \frac{1}{3}x + 5 \quad & | -\frac{1}{3}x; +5 \\ \frac{5}{3}x = 10 \quad & | \cdot \frac{3}{5} \\ x = 6 & \end{aligned}$$

und Einsetzen von x in (I) (es ginge auch in (II))

$$y = 2 \cdot 6 - 5 = 7$$

Wir notieren die Lösungsmenge mit $\mathbb{L} = \{(6; 7)\}$.

Beim **Additionsverfahren** ist dafür zu sorgen, dass zwei Koeffizienten vor der gleichen Variablen den Wert so haben, dass bei einer Addition der beiden Gleichung diese Variable entfällt. Auch dazu wieder ein Beispiel:

$$\begin{aligned} (I) \quad & 7x+4y = 12 \\ (II) \quad & 5x+3y = 20 \end{aligned}$$

Nun wird die erste Gleichung mit 3 und die zweite Gleichung mit (-4) multipliziert:

$$\begin{aligned} (I') \quad & 21x \quad +12y = 45 \\ (II') \quad & -20x-12y = -80 \end{aligned}$$

Bei der anschließenden Addition der beiden Gleichungen fällt das y weg:

$$x = -35$$

Dann x in eine der ursprünglichen Gleichungen einsetzen ergibt dann $y = 65$. Somit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(-35; 65)\}$.

Auch bei LGS mit 3 Gleichungen und drei Unbekannten lassen sich die obigen Verfahren anwenden, meistens müssen sie nur mehrfach angewendet werden. Man reduziert so sein dreidimensionales Problem erst auf ein zweidimensionale und geht dann wie gerade beschrieben vor. Zum Schluß wir natürlich eine Rücksubstitution mehr notwendig.
Dies führt dann für LGS n-ten Grades (also n Unbekannte und m Gleichungen) auf den sogenannten Gauss-Algorithmus. Hierbei handelt es sich um ein systematisches Schema, mit dem jedes LGS so äquivalent umgewandelt werden kann, dass die Lösung abgelesen werden kann. Wir werden das am folgenden Beispiel exemplarisch durchführen.

$$\begin{aligned} (I) \quad & x \quad -2y + z \; =0 \\ (II) \quad & x \quad -y - 3z=4 \\ (III) \quad & -4x+5y + 9z= -9 \end{aligned}$$

Wir können aus den ersten zwei Gleichungen x eliminieren, indem wir die erste Gleichung von der zweiten subtrahieren. Aus der ersten und der dritten Gleichung können wir ebenfalls x eliminieren, indem wir 4 mal die erste Gleichung zur dritten Gleichung addieren. Zusammengefasst:

$$\begin{aligned} (I) \quad & x \quad -2y + z \; =0 & \\ (II) \quad & x \quad -y - 3z=4 & |(II) - (I) \\ (III) \quad & -4x+5y + 9z= -9 & |(III) + 4(I) \end{aligned}$$

Die erste Gleichung bleibt damit unverändert und so entsteht

$$\begin{aligned} (I) \quad & x-2y + z \; =0 \\ (II) \quad & y - 4z \; =4 \\ (III) \quad & -3y + 13z= -9 \end{aligned}$$

So erhalten wir in den letzten beien Zeilen ein System von zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten y und z, dass wir wieder mit dem Additionsverfahren lösen können, indem wir drei mal die zweite Gleichung zur dritten addieren, also

$$\begin{aligned} (I) \quad & x-2y + z \; = 0 & \\ (II) \quad & y - 4z \; = 4 & \\ (III) \quad & -3y + 13z= -9 & |(III) + 3(II) \end{aligned}$$

Das ergibt:

$$\begin{aligned} (I) \quad & x - 2y + z = 0 \\ (II) \quad & y - 4z = 4 \\ (III) \quad & z = 3 \end{aligned}$$

Dies ist der halbe Weg des Gausschen Algorithmus. Wenn wir bis dorthin das gesamte LGS betrachten, können wir ab dann durch Rücksubstitution die Lösung des LGS errechnen.
Durch Einsetzen des Wertes z in die zweite Gleichung erhalten wir

$$y - 4 \cdot 3 = 4 \quad \Longrightarrow \quad y = 16.$$

Wenn wir $y = 16$ und $z = 3$ in die erste Gleichung des ursprünglichen Systems einsetzen, erhalten wir

$$x - 2 \cdot 16 + 3 = 0$$

mit der Lösung $x = 29$. Hiermit ist das Gleichungssystem gelöst. Die gesuchte Lösungsmenge lautet $\mathbb{L} = \{(29; 16; 3)\}$.
Rein formalistisch können wird das LGS nun durch weitere Additionsverfahren so vereinfachen, das die schon oben berechnete Lösung abgelesen werden kann. Dazu gehen wir wie folgt vor:

$$\begin{aligned} (I) \quad & x - 2y + z = 0 && | \quad (I) + (III) \\ (II) \quad & y - 4z = 4 && |(II) + 4(III) \\ (III) \quad & z = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I) \quad & x - 2y = -3 && | \quad (I) - (III) \\ (II) \quad & y = 16 && |(II) + 4(III) \\ (III) \quad & z = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I) \quad & x - 2y = -3 && | \quad (I) + 2(II) \\ (II) \quad & y = 16 \\ (III) \quad & z = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I) \quad & x = 29 && | \quad (I) + 2(II) \\ (II) \quad & y = 16 \\ (III) \quad & z = 3 \end{aligned}$$

Das nächste Beispiel zeigt, wie der Gausssche Algorithmus auf ein lineares System mit einander widersprechenden Gleichungen reagiert.

$$\begin{aligned} (I) \quad & 2x - 3y + 4z = 19 \\ (II) \quad & 4x - 4y + 3z = 22 && | \quad (II) - 2(I) \\ (III) \quad & 6x - 7y + 7z = 10 && |(III) - 3(I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I) \quad & 2x - 3y + 4z = 19 \\ (II) \quad & 2y - 5z = -16 \\ (III) \quad & 2y - 5z = -47 && |(III) - (II) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(I) \quad & 2x-3y+4z = 19\\ (II) \quad & 2y-5z = -16\\ (III) \quad & 0 = -31\end{aligned}$$

Die aus der letzten Zeile entstehende Gleichung

$$0 \cdot z = -31$$

ist für keinen Wert z erfüllbar. Das Gleichungssystem ist also widersprüchlich, die Lösungsmenge somit leer: $\mathbb{L} = \emptyset$.
Betrachten wir noch ein weiteres Beispiel:

$$\begin{aligned}(I) \quad & x+ y+ z = 3 & \\ (II) \quad & x+2y+3z = 6 & \mid \quad (II) - (I)\\ (III) \quad & 2x+3y+4z = 9 & \mid (III) - 2(I)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(I) \quad & x+ y+ z = 3 & \\ (II) \quad & y+2z = 3 & \\ (III) \quad & y+2z = 3 & \mid (III) - (II)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(I) \quad & x+ y+ z = 3\\ (II) \quad & y+2z = 3\\ (III) \quad & +0z = 0\end{aligned}$$

Die aus der letzten Zeile entstehende Gleichung

$$0 \cdot z = 0.$$

Diese ist für alle Wert $z \in \mathbb{R}$ erfüllbar. Das Gleichungssystem hat also unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge wird dann wie folgt ermittelt: Wähle $z = c \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest. Setze dann das gewählte c in die Gleichung (II) ein, also

$$y + 2z = 3 \xRightarrow{c \text{ einsetzen}} \quad y + 2c = 3 \quad \xRightarrow{\text{nach } y \text{ auflösen}} \quad y = 3 - 2c.$$

Dann die Lösung von y und z in Abhängigkeit von c in (I) einsetzen:

$$x + y + z = 3 \quad \xRightarrow{x,y \text{ einsetzen}} \quad x + (3 - 2c) + c = 3 \quad \xRightarrow{\text{nach } x \text{ auflösen}} \quad x = 3 - c - 3 + 2c = c$$

Somit ist die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{(c; 3 - c; c) | c \in \mathbb{R}\}.$$

Kapitel 3

Geometrie

In diesem Kapitel wiederholen wir die wichtigsten Begriffe und Zusammenhänge des ältesten Gebiets der Mathematik, der Geometrie. Wir beschränken uns hier auf die zwei- und dreidimensionale euklidische Geometrie, die Elementargeometrie, die auch im Schulunterricht gelehrt wird und die sich mit Punkten, Geraden, Ebenen, Abständen, Winkeln etc. beschäftigt.

3.1 Grundbegriffe der Geometrie

Punkt und Gerade sind die wichtigsten Grundbegriffe der Elementargeometrie. Diese abstrakten Begriffe lassen sich auch bei exakter Betrachtungsweise nicht definieren. Trotzdem machen wir uns die Begriffe Punkt und Gerade in der Anschauung zugänglich, wie das im folgenden Bild geschieht.

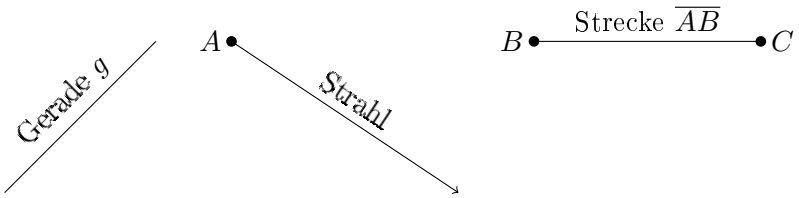


Abb. 3.1: Grundbegriffe der euklidischen Geometrie

1. Hierbei sind die **Geraden** mit g bezeichnet worden, sie haben unbegrenzte Ausdehnung.
2. Ein **Punkt** kann dann als Schnittstelle zweier Geraden aufgefasst werden.
3. Eine **Strecke** ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten, also eine in beide Richtungen begrenzte Gerade. Hier ist es also möglich eine Länge anzugeben.
4. Ein **Strahl** ist eine in eine Richtung begrenzte Gerade. Sie beginnt in einem Punkt und läuft in eine Richtung unbegrenzt weiter.
5. Zwei **parallele** Geraden haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt (auch nicht im Unendlichen).
6. Der **Abstand** zweier geometrischer Objekte ist die kürzeste Verbindung zwischen ihnen. Zwischen zwei Punkten ist es also die gerade Strecke. Zwischen zwei parallelen Geraden ist es der immer gleich bleibende kürzeste Abstand, der durch eine senkrecht auf die beiden Geraden konstruierte Strecke ermittelt werden kann.

Kommen wir als nächstes zum Begriff des Winkels und den dazugehörigen weiteren Begriffen.

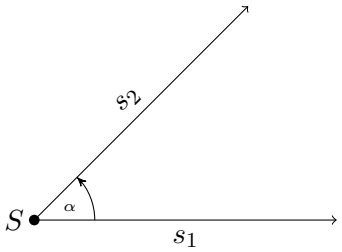


Abb. 3.2: Winkel

Bringt man einen Strahl mit Anfangspunkt S von seiner Anfangslage s_1 durch Drehung um Startpunkt in die Endlage s_2, so nennt man

1. die überstrichene Fläche das Innere des Winkels α,
2. s_1 und s_2 die **Schenkel** des Winkels α,
3. S den **Scheitel** des Winkels α.
4. Erfolgt die Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn, so heißt der **Drehsinn** und auch der Winkel α **positiv**, andernfalls **negativ**.

Diesen Winkel α kann man in **Grad** messen, indem man den rechten Winkel zweier senkrecht aufeinander stehender Geraden g_1 und g_2 gleich $90°$ setzt, z.B.

$$\alpha = a^\circ.$$

Ein Grad besteht aus 60 **Bogenminuten** $1° = 60'$ und eine Bogenminute aus 60 **Bogensekunden** $1' = 60''$. Man kann den Winkel α aber auch im **Bogenmaß** angeben, indem man die Länge des Kreisbogens durch die Länge des Kreisradius teilt, also

$$\alpha = \frac{b}{r} = \frac{b'}{r'}.$$

Das Verhältnis $\frac{b}{r}$ ist also für einen vorgegeben Winkel α bei beliebigen Radien r konstant. Daher entspricht ein im Bogenmaß angegebener Winkel am Einheitskreis ($r = 1$) der Länge des Kreisbogens b.

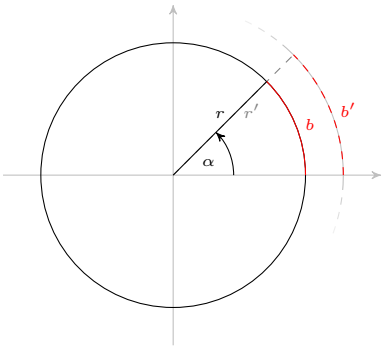


Abb. 3.3: Winkel: Angaben in Grad und Bogenmaß

Demzufolge entspricht einem Winkel von $360°$ der Umfang des Einheitskreises 2π. Daraus lassen sich die Umrechnungsbeziehungen zwischen Gradmaß und Bogenmaß wie folgt aufstellen:

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b, \qquad \text{und} \qquad b = \frac{\pi}{180^\circ}\alpha.$$

Ein Beispiel zur Umrechnung:

Beispiel 3.1.1: *Der Winkel $\alpha = 47° \, 12'36''$ soll im Bogenmaß angegeben werden. Dazu rechnen wir die Minuten und Sekunden erst einmal in einen Dezimalbruch um. $12' = 720''$, also insgesamt $720'' + 36'' = 756''$. Weil*

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \quad \Longrightarrow \quad 1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ \quad \Longrightarrow \quad 756'' = 756 \cdot \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ = 0,21^\circ$$

Damit haben wir also

$$\alpha = 47^\circ \, 12' \, 36'' = 47,21^\circ \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 47,21^\circ = 0,824$$

3.2 Dreiecke

Die ersten Figuren mit denen wir uns nun beschäftigen sind **Dreiecke**. Hat man drei Punkte A, B und C in einer Ebene, die nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen, so kann man daraus ein Dreieck $\triangle(ABC)$ mit den Eckpunkten A, B und C bilden. Dazu schneidet man die drei Geraden durch je zwei dieser Punkte miteinander. Die Strecken zwischen je zwei Eckpunkten des Dreiecks mit den Längen a, b und c heißen dann **Seiten** des Dreiecks und werden nach dem gegenüberliegenden Eckpunkt benannt. Die Winkel α, β und γ innerhalb des Dreiecks an den Eckpunkten werden **Innenwinkel** des Dreiecks genannt und tragen die Bezeichnung des Eckpunktes in griechischen Buchstaben. Da zwei in einem Punkt schneidende Geraden maximal zwei verschiedene Winkel einschließen, treten diese Winkel α, β und γ auch außerhalb des Dreiecks auf. **Außenwinkel** des Dreiecks nennt man jedoch die entsprechenden Winkel α', β' und γ', die jeweils zweimal außerhalb des Dreiecks auftreten. Die folgende Abbildung verdeutlicht die Bezeichnungen.

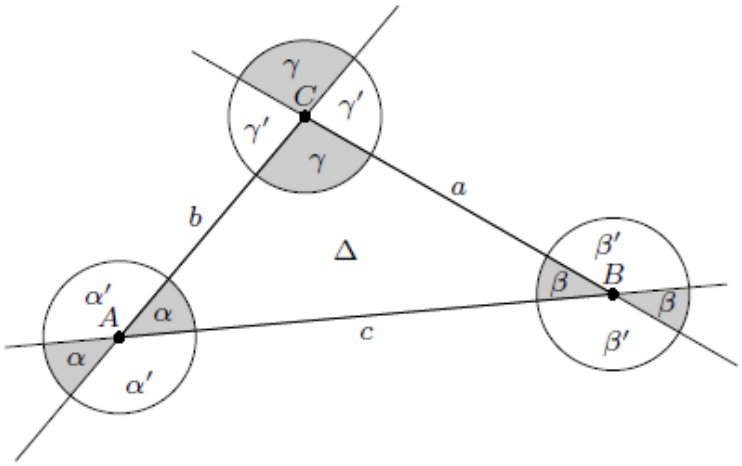


Abb. 3.4: Die Punkte, Seitenlängen und Innen- und Außenwinkel eines Dreiecks

Betrachten wir obige Abbildung unter einem weiteren Gesichtspunkt: Um vom Eckpunkt A zum Eckpunkt B auf möglichst kurzem Weg zu gelangen, muss man eine Strecke der Länge c zurücklegen. Jede andere Wahl stellt einen Umweg da, weil die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten durch die Strecke zwischen diesen Punkten festgelegt ist. So ist es zum Beispiel ein Umweg, wenn man von A aus erst nach C gehe und danach von C nach B, denn dann hat man insgesamt die größere Strecke $a + b$ zurückgelegt. Damit erhalten wir die Dreiecksungleichung:

Satz 3.2.1: ***Dreiecksungleichung***
Die Summe der Länge zweier Seiten a und b eines Dreiecks ist stets größer als die Länge der verbleibenden Seite c: $a + b > c$.

Betrachten wir nun die nächste Abildung. Zu einem Dreieck $\triangle(ABC)$ wurde eine zu c parallele Gerade (hier gestrichelten) durch den gegenüberliegenden Eckpunkt C gezeichnet. Der Innenwinkel α am Punkt A tritt hier ein zweites Mal als Wechselwinkel auf – dieser ist nämlich auch der Winkel zwischen dieser Gerade und der Seite des Dreiecks, die A und C verbindet. Analog verhält es sich mit dem Innenwinkel β bei B. Die Addition des verbleibenden Innenwinkel γ zu der Summe dieser beiden Duplikate von α und β immer gleich 180° ist. Folgende weitere Relationen

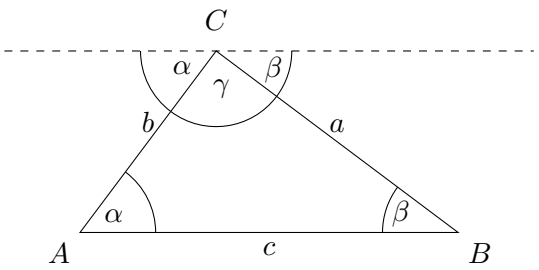


Abb. 3.5: Die Winkelsumme eines Dreiecks ist 180°.

der Innen- und Außenwinkeln lassen sich erkennen:

$$\alpha' = 180° - \alpha, \quad \beta' = 180° - \beta \quad \text{und } \gamma' = 180° - \gamma,$$

so erhält man zusätzlich

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 3 \cdot 180° - 180° - (\alpha + \beta + \gamma) = 360°.$$

Satz 3.2.2: ***Winkelsumme im Dreieck***
Die Summe $\alpha+\beta+\gamma$ der Innenwinkel α, β, γ eines Dreiecks ist stets 180°. *Die Summe $\alpha'+\beta'+\gamma'$ der Außenwinkel α', β', γ' eines Dreiecks ist stets* 360°.

Es folgen Definitionen von weiteren wichtigen Geraden, die ein Dreieck schneiden können.

Definition 3.2.3: ***Mittelsenkrechte, Winkel-, Seitenhalbierende, Höhe***

- *Die **Mittelsenkrechte** geht durch den Mittelpunkt einer Seite und steht senkrecht (**orthogonal**) auf ihr.*
- *Die **Winkelhalbierende** geht durch einen Eckpunkt des Dreiecks und halbiert dessen Innenwinkel.*
- *Die **Seitenhalbierende** geht durch den Mittelpunkt einer Seite des Dreiecks und den gegenüberleigenden Winkel.*
- *Die **Höhe** steht senkrecht auf einer Seite und geht durch den gegenüberliegenden Eckpunkt.*

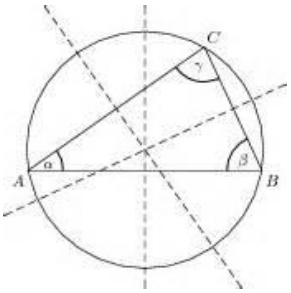


Abb. 3.6: Der Umkreis eines Dreiecks

Betrachten wir die Mittelsenkrechten genauer. Jede Mittelsenkrechte teilt die zugehörige Seite in zwei gleichgroße Teilstrecken. Das bedeutet, dass jeder Punkt der Mittelsenkrechten von den beiden Endpunkten der dazugehörigen Seite gleich weit entfernt ist. Dies trifft natürlich auf jede der drei Mittelsenkrechten zu. Wenn nun alle Mittelsenkrechten geschnitten werden, erhält man einen Punkt, der von allen drei Ecken des Dreiecks gleich weit entfernt ist. Dies ist der kleinste

Kreis, in den man das ganze Dreieck bekommt, so dass alle Eckpunkte auf der Kreislinie zu liegen bekommen.

Satz 3.2.4: ***Mittelsenkrechte und Umkreis***
Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des ***Umkreises*** *des Dreiecks.*

Auch die Winkelhalbierenden, die durch einen Eckpunkt gehen und den dortigen Innenwinkel halbieren, gehen durch einen gemeinsamen Schnittpunkt. Dazu betrachten wir die folgende Abbildung.

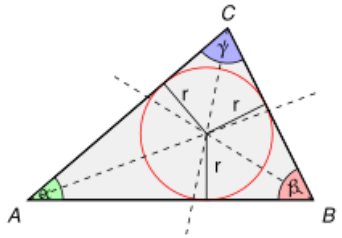


Abb. 3.7: Der Inkreis eines Dreiecks

Dies ist der Mittelpunkt des sogenannten Inkreises, also der größte Kreis, der in das Dreieck passt.

Satz 3.2.5: ***Winkelhalbierende und Inkreis***
Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des ***Inkreises*** *des Dreiecks.*

Satz 3.2.6: ***Inkreisradius***
Für den ***Inkreisradius*** ρ *(sprich: ro) gilt folgender Zusammenhang:*

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}, \qquad \text{mit } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Beweis. Dies Tatsache beweisen wir im Rahmen der Analytischen Geometrie in der 2. Woche der Oberstufenmathematik.

■

Zuletzt betrachten wir noch die Seitenhalbierenden. Diese gehen durch den Mittelpunkt einer Seite und den gegenüberliegenden Eckpunkt. Auch diese schneiden sich in einem Punkt, dem sogenannten **Schwerpunkt**. Für diesen gilt:

Satz 3.2.7: ***Seitenhalbierende und Schwerpunkt***
Die drei Seitenhalbierende eines Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt $P = (A+B+C)/3$ *des Dreiecks. Dieser teilt jede Strecke eines Eckpunkts vom Dreieck zum Mittelpunkt von dessen gegenüberliegender Seite im Verhältnis 2 : 1.*

Beweis. Dies Tatsache beweisen wir ebenfalls im Rahmen der Analytischen Geometrie in der 2. Woche.

■

Die **Höhen** eines Dreiecks schneiden sich ebenfalls in einem Punkt. Sie stehen senkrecht auf einer Seite und gehen durch den gegenüberliegenden Eckpunkt. Bei einem stumpfwinkligen Dreieck

($\alpha > 90°$ wie in der Abbildung), müssen die Seiten am stumpfen Winkel verlängert werden, um die Höhe (hier h_c) einzeichnen zu können. Sie liegt in diesem Fall außerhalb des Dreiecks.

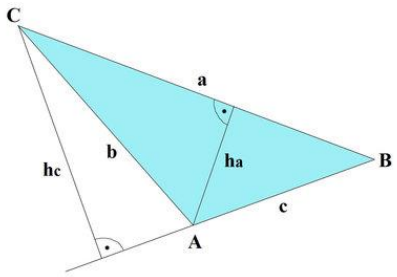


Abb. 3.8: Die Höhen im Dreieck

Mit Hilfe der Höhe lässt sich der Flächeninhalt eines jeden Dreiecks berechnen. Er ist genau die Hälfte eines Rechtecks mit der Höhe als eine Seite (siehe Abbildung).

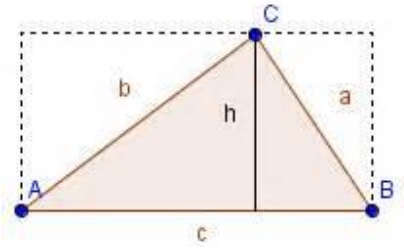


Abb. 3.9: Die Fläche eines Dreiecks

Satz 3.2.8: ***Flächeninhalt eines Dreiecks***
Der Flächeninhalt eines Dreiecks F ist die Hälfte des Produkts der Länge einer Höhe h mit der Länge c der Seite, auf der diese Höhe senkrecht steht:

$$A = \frac{hc}{2}.$$

3.3 Kongruenz und Ähnlichkeit bei Dreiecken

Kommen wir nun zu **Kongruenz** und **Ähnlichkeit** bei Dreiecken. Dazu folgende Definition.

Definition 3.3.1: ***Kongruenz bei Dreiecken***
Zwei Dreiecke $\triangle(ABC)$ und $\triangle(A'B'C')$ heißen ***kongruent*** *oder* ***deckungsgleich****,*

$$\triangle(ABC) \cong \triangle(A'B'C'),$$

wenn sie so verschoben und gedreht werden können, dass sie vollständig zusammenfallen. Mindestens drei Hauptstücke der Dreiecke müssen übereinstimmen, damit die Dreiecke kongruent sind:

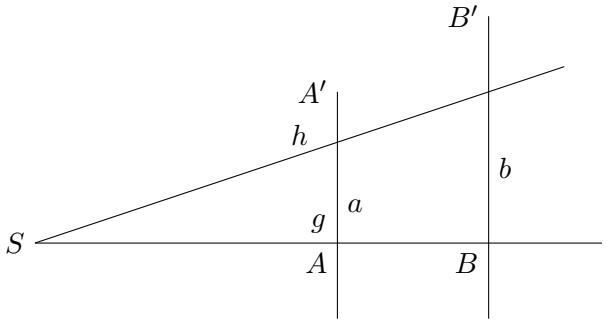
1. *die drei Seiten (SSS),*
2. *zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel (SWS),*
3. *zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel (SSW),*
4. *einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln (WSW).*

Es gilt auch die Umkehrung, d.h., stimmen die Dreiecke in den durch die Kongruenzsätze angegebenen Hauptstücken überein, so sind sie kongruent. Auf der Grundlage dieser Sätze lassen sich eindeutige Dreieckskonstruktionen durchführen.

Definition 3.3.2: ***Ähnlichkeit bei Dreiecken***
Zwei Dreiecke $\triangle(ABC)$ und $\triangle(A'B'C')$ heißen ***ähnlich****, wenn sie in entsprechenden Winkeln übereinstimmen und wenn die Längen einander entsprechender Seiten proportional sind.*
Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in

1. *dem Verhältnis der Längen der drei Seiten,*
2. *dem Verhältnis der Längen zweier Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel,*
3. *dem Verhältnis der Längen zweier Seiten und dem der größeren dieser Seite gegenüberliegenden Winkel,*
4. *zwei gleichliegenden Winkeln.*

Verwandt mit dem Ähnlichkeitssatz sind die Strahlensätze. (Warum -> erklären an Hand der Skizze).



Satz 3.3.3: ***Strahlensätze***
Gegeben sind zwei Strahlen g und h mit gemeinsamen Anfangspunkt S. Außerdem zwei Geraden a und b, die die Strahlen g und h in den Punkten A und A' bzw. B und B' schneiden. Dann gilt:

1. *Wenn a parallel zu b, dann ist das Längenverhältnis zweier Strecken auf dem einen Strahl gleich dem Längenverhältnis der entsprechenden Strecken auf dem anderen Strahl, oder mathematisch formuliert:*

$$\text{Wenn } a \parallel b, \text{ dann gilt } \frac{|SA|}{|SB|} = \frac{|SA'|}{|SB'|},$$

   wobei $|AB|$ die Länge der Strecke zwischen A und B meint.

2. *Wenn a parallel zu b, dann ist das Längenverhältnis der beiden Strecken auf den parallelen Geraden jeweils, gleich dem Längenverhältnis dem von S ausgehenden Strecken auf den Strahlen, oder mathematisch formuliert:*

$$\text{Wenn } a \parallel b, \text{ dann gilt } \frac{|AA'|}{|BB'|} = \frac{|SA|}{|SB|}, \text{ und } \frac{|AA'|}{|BB'|} = \frac{|SA'|}{|SB'|}$$

3.4 Rechtwinklige Dreiecke

Beschäftigen wir uns nun mit rechtwinkligen Dreiecken. Im rechtwinkligen Dreieck wird die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite **Hypotenuse** genannt, die beiden anderen Seiten heißen

Katheten. Der wichtigste Satz zu rechtwinkligen Dreiecken ist der **Satz des Pythagoras**. Der Grieche Pythagoras lebte ca. 500 v. Chr., zunächst auf Samos und später in Süditalien. Der nach ihm benannte Satz ist dennoch bereits viel früher entdeckt und bewiesen worden. In Mesopotamien (dem heutigen Irak) wurden Tontafeln aus der Zeit ca. 1800 v. Chr. gefunden, auf denen der Satz des Pythagoras erwähnt ist.

Satz 3.4.1: *In einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a und b und Hypotenuse c gilt*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

.

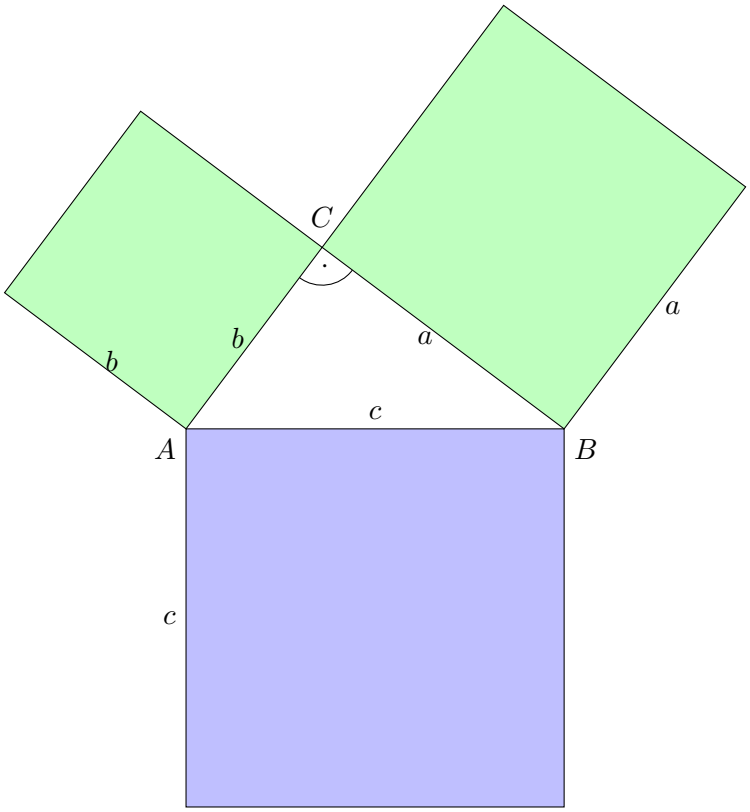


Abb. 3.10: Veranschaulichung des Satz des Pythagoras

Beweis. Wir zeichnen acht Exemplare (vier weiße und vier graue) des angegebenen Dreiecks in ein Quadrat mit den Seiten $a + b$, auf die unten angegebene Weise. Das kleine Quadrat in der Mitte färben wir ebenfalls grau. Es entsteht dann ein schräg gezeichnetes graues Quadrat mit Seitenlänge c (siehe die linke Figur), das somit den Flächeninhalt c^2 hat.

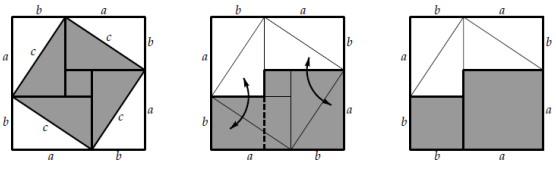


Abb. 3.11: Beweis des Satz des Pythagoras

Dann vertauschen wir (siehe die mittlere Figur) nachfolgend die grauen Dreiecke, die links und rechts oben stehen, mit den weißen Dreiecken links und rechts unten. Die daraus resultierende graue Figur besteht aus zwei Quadraten neben einander: Ein Quadrat mit der Seitenlänge b und ein Quadrat mit der Seitenlänge a (siehe die rechte Figur). Hieraus folgt, dass c^2, der Flächeninhalt der grauen Fläche links, gleich $a^2 + b^2$ ist, dem Flächeninhalt der grauen Fläche rechts. Hiermit ist der Satz bewiesen.

■

Satz 3.4.2: ***Höhensatz des Euklid***
Für rechtwinklige Dreiecke ist das Quadrat der Höhe h auf der Hypotenuse gleich dem Produkt der beiden Hypotenusenabschnitte p und q:

$$h^2 = pq$$

Beweis. Wie man sieht, schneidet die Höhe h das rechtwinklige Dreieck in der Hypotenuse und formt so zwei weitere rechtwinklige Dreiecke. Dies sind einmal $\triangle CSB$ und $\triangle ASC$. Der Satz des Pythagoras lautet: $a^2 + b^2 = c^2$. In diese Formel kann man nun die Teilstrecken eintragen, denn hier gilt:

$$a^2 = p^2 + h^2 \text{ sowie } b^2 = q^2 + h^2 \text{ und es gilt } c^2 = (p+q)^2.$$

Eingesetzt lautet die gesamte Formel:

$$(p^2 + h^2) + (q^2 + h^2) = (p+q)^2$$

Ausgeschrieben ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} p^2 + 2h^2 + q^2 &= q^2 + 2qp + p^2 && | - q^2; -p^2 \\ 2h^2 &= 2qp && | : 2 \\ h^2 &= q \cdot p \end{aligned}$$

Somit ist der Höhensatz des Euklid bewiesen.

■

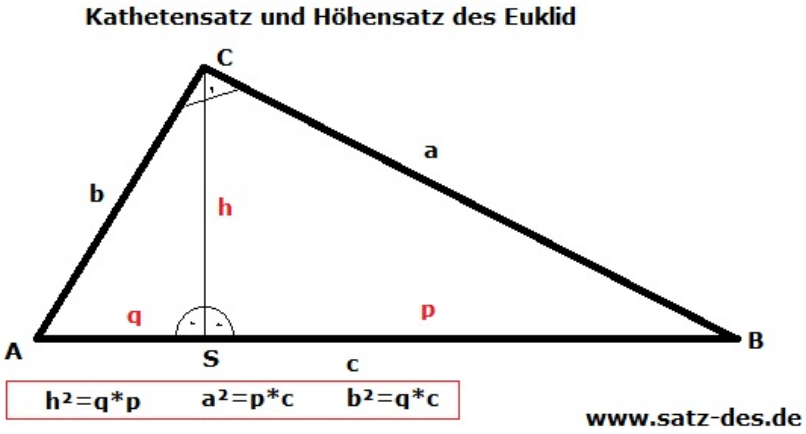


Abb. 3.12: Höhen- und Kathetensatz des Euklid

Satz 3.4.3: ***(Katheten-)Satz des Euklid***
Für rechtwinklige Dreiecke ist das Quadrat der Länge einer Kathete a gleich dem Produkt der Länge der Hypotenuse c mit der Länge des Hypotenusenabschnitts p, der einen gemeinsamen Punkt mit dieser Kathete hat:

$$a^2 = cp, \qquad \text{und } b^2 = cq$$

Beweis. Wir beziehen uns wieder auf das unten angegebene Dreieck und rechnen wieder mit dem Satz des Pythagoras. Die korrekte Formel zur Berechnung von b lautet:

$$a^2 = p^2 + h^2$$

nun schon vom Höhensatz des Euklid, dass $h^2 = p \cdot q$ ist und setzen dies in die Formel ein.

$$a^2 = p^2 + p \cdot q$$

Nun p ausklammern:

$$a^2 = p \cdot (p + q)$$

Dann $p + q$ durch die Länge c ersetzen:

$$a^2 = p \cdot c$$

Entsprechend funktioniert dieser Beweis auch mit der Kathete b.

■

Satz 3.4.4: ***Satz von Thales***
Für rechtwinklige Dreiecke mit gemeinsamer Hypotenuse (der Länge c gebildet von den Eckpunkten A und B) liegt der verbleibende Eckpunkt C stets auf dem gemeinsamen Umkreis dieser Dreiecke. Dieser Umkreis hat den Mittelpunkt $M = (A + B)/2$ und den Radius $c/2$.

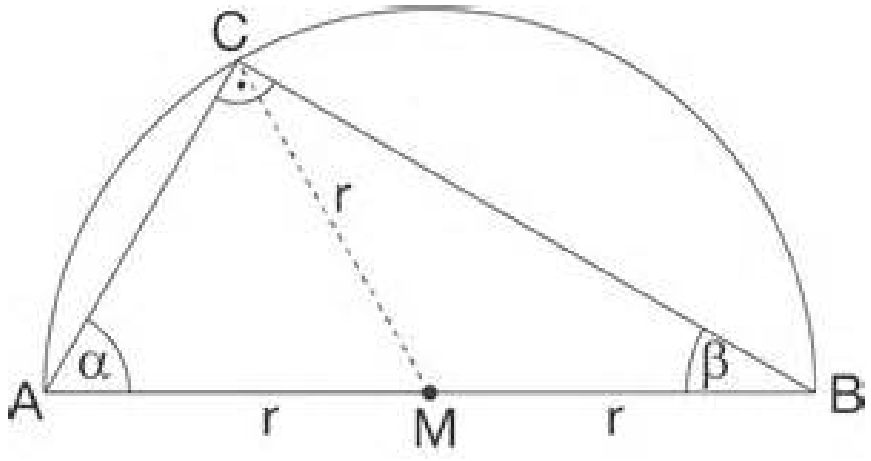
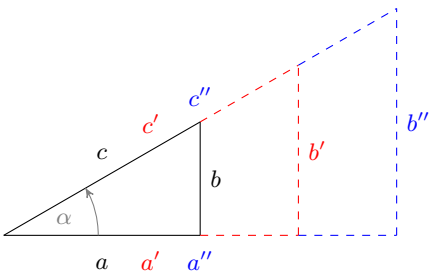


Abb. 3.13: Satz des Thales

Beweis. Durch Konstruktion zweier gleichschenkliger Dreiecke aus dem Ursprungsdreieck ergeben sich die Winkel α und β, sowie $\gamma = \alpha + \beta$. Die Winkelsumme beträgt in einem Dreieck 180°, also $\alpha+\beta+\gamma = 108°$. Nun ersetzt man γ durch $\alpha+\beta$ in der Formel und erhält $\alpha+\beta+\alpha+\beta = 180°$. Fasst man die linke Seite der Formel zusammen lautet diese: $2(\alpha + \beta) = 180°$. Durch 2 teilen ergibt: $\alpha + \beta = 90°$. Da wir wissen, dass $\alpha + \beta$ auch der Winkel bei C ist, muss zwangsläufig jedes Dreieck auf dem Thaleskreis bei γ einen rechten Winkel besitzen. ■

3.5 Trigonometrie

Zur Winkelmessung in rechtwinkliger Dreiecke stellt man fest, dass sich die Verhältnisse der Seitenlängen eignen. Man bezeichnet man dem Winkel α gegenüberliegende Kathete als **Gegenkathete** von α und die Seite b als die **Ankathete**. Dann lassen sich folgende Verhältnisse bilden:



Es gilt:

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{a''}{c''}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{a''}{c''}$$

Abb. 3.14: Seitenverhältnisse in einem rechtwinkligen Dreieck

Wegen der Strahlensätze hängen diese Verhältnisse nur vom Winkel α ab. Man definiert

$$\cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse} = \frac{a}{c}, \qquad \sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse} = \frac{b}{c},$$

$$\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{b}{a}, \qquad \cot(\alpha) = \frac{Ankathete}{Gegenkathete} = \frac{a}{b}.$$

Die Definitionen kann man sich mit der *„GAGA Hummel-Hummel AG“* oder der *„GAGA Hühner-Hof AG“* merken, bei der die Großbuchstaben von GAGA und Hummel-Hummel bzw. HühnerHof

AG die Zähler bzw. Nenner bei der Darstellung der Funktionen in der üblichen Reihenfolge darstellen:

$$\frac{G}{H} \quad \frac{A}{H} \quad \frac{G}{A} \quad \frac{A}{G}.$$

Berücksichtigt man dass $\beta = 90° - \alpha$ ist so kann man folgende Beziehungen aufstellen:

$$\begin{aligned}
\sin\beta &= \frac{b}{c} = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \\
\cos\beta &= \frac{a}{c} = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha, \\
\tan\beta &= \frac{b}{a} = \tan(90° - \alpha) = \cot\alpha, \\
\cot\beta &= \frac{a}{b} = \cot(90° - \alpha) = \tan\alpha.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt der nächste Satz fast unmittelbar.

Satz 3.5.1: *Trigonometrische Zusammenhänge:*

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \\
\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} &= \frac{1}{\tan\alpha},
\end{aligned}$$

Und mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1, \\
1 + \tan^2\alpha &= \frac{1}{\cos^2\alpha}, \\
1 + \cot^2\alpha &= \frac{1}{\sin^2\alpha}.
\end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen. ■

Noch einen Überblick über einige wichtige Werte der Winkelfunktionen (wir kommen später im Rahmen der Funktionen auf die Winkelfunktionen zurück):

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\substack{nicht \\ definiert}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Für allgemeine Dreiecke lassen sich sämtliche Berechnungen mit Hilfe des Sinus- bzw. Kosinussatzes ermitteln, die hier nur der Vollständigkeit aufgelistet wurden und sich in jeder Formelsammlung nachschlagen lassen.

Satz 3.5.2: ***Sinussatz***
In einem allgemeinen Dreieck gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Satz 3.5.3: ***Kosinussatz***
In einem allgemeinem Dreieck gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

3.6 Weitere geometrische Erkenntnisse

Die meisten geometrischen Probleme in Vielecken und Körpern lassen sich auf die Berechnungen im Dreieck zurückführen und werden hier nicht weiter thematisiert. Entsprechende Formeln lassen sich bei Bedarf entwickeln oder in Formelsammlungen nachschlagen.